2,19-20 Соизмеримость и несоизмеримость

Два[1] отрезка *соизмеримы*, если они имеют *общую меру* — третий отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз.

1. Доказать, что прямоугольник, стороны, которого соизмеримы, можно разрезать на квадраты.

2. Лёша дал такое определение: два отрезка соизмеримы, если существует третий, в котором каждый из двух укладывается целое число раз. Равносильно ли это определение обычному?

3. Верно ли, что отрезки a и b соизмеримы тогда и только тога, когда a и $a+2b$ соизмеримы?

4. Каждый из двух отрезков a и b укладывается в некотором отрезке c целое число раз. Следует ли отсюда, что отрезки a и b имеют общую меру?

5. От прямоугольника отрезают квадраты со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, столько раз, сколько можно (мы будем называть это «операцией Евклида»). К оставшемуся прямоугольнику снова применяют операцию Евклида и так далее. Сколько и каких квадратов получится, если начать с прямоугольника со сторонами 75 и 21?

6. (Продолжение) Применяя операцию Евклида, прямоугольник разрезали на большой квадрат, два квадрата поменьше и два совсем маленьких. Найти отношение сторон исходного прямоугольника.

7. Доказать, что если стороны прямоугольника соизмеримы, то применяя операцию Евклида, мы в конце концов разрежем его на квадраты.

8. Доказать, что если применение операции Евклида разрезает прямоугольник на некоторое (конечное) число квадратов, то стороны прямоугольника соизмеримы, и сторона самого маленького квадрата является их общей мерой.

---

[1] Данные задачи взяты из книги «Задачи по математике» под редакцией А. Шеня, Москва, 2000, МЦНМО.

9. (Продолжение) Доказать, что сторона самого маленького квадрата является наибольшей общей мерой и любая другая общая мера укладывается в ней целое число раз. Результаты задач 6 и 7 позволяют дать эквивалентное определение соизмеримости: стороны прямоугольника несоизмеримы, если к нему можно применять операцию Евклида бесконечное число раз.

10. Говорят, что стороны прямоугольника находятся в отношении «золотого сечения», если после отрезания от него квадрата получается прямоугольник, подобный исходному (имеющий то же отношение сторон). Найти отношение золотого сечения.

11. Доказать, что отношение золотого сечения иррационально, то есть не выражается дробью с целыми числителем и знаменателем.

5-7. Движения прямой

12. Введём координату на прямой, отметим там точки с целыми координатами: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Через S_n обозначим отражение в точке n, через T_n — параллельный перенос на число n. Какое преобразование прямой получится при композиции (а) $S_0 \circ S_1$; (б) $S_0 \circ S_1 \circ S_2$; (в) $S_0 \circ S_2 \circ S_1$?

13. Пусть g и h - два движения прямой, причём $g \circ h = h \circ g$ и $g \neq h$. Какими могут быть g и h?

14. Пусть g и h - два движения прямой, причём $g \circ h = \mathrm{Id}$, и $g \neq h$. Что можно сказать про g и h?

15. При каких n (а) T_n; (б) S_n выражается в виде композиций S_0 и S_1?

16. При каких n (а) T_n; (б) S_n выражается в виде композиций S_0, S_1, S_2?

8-10. Движения окружности

Есть задачи на сайте дети науки p://childrenscience.ru/савватеев.-100-лекций-по-математике.html.

17. Пусть φ - движение окружности. Сколько у φ может быть неподвижных точек (имеется ввиду общее количество, найдите все возможные варианты)?

18. Пусть g - движение окружности, A и B - две точки окружности. Известно, что $g(A) = A$, $g(B) \neq B$. Какой вид может иметь g?

19. Пусть l и m - перпендикулярные прямые (то есть пересекающиеся под углом в 90 градусов). Найдите $S_l \circ S_m$

20. Что может получиться в качестве композиции поворота и отражения окружности?

21. Отметим точки $A_1, \ldots, A_{10}$ на окружности на равном расстоянии друг от друга. Отражение относительно прямой, проходящей через точки A_i и A_j, обозначим через S_{ij}. Пусть R_i - поворот, который перевод A_1 в A_i. Найдите (а) $S_{16} \circ R_5$,(б) $R_4 \circ S_{38} \circ R_6$.

11. Арифметика остатков

22. Отметить на числовой оси целые числа, которые при делении на 7 дают остаток 2. (На рисунке должны поместиться числа от -20 до 20.)

23. Книги на столе пытались связывать в пачки по 2, по 3, по 4 и по 5 книг, и каждый раз оставалась одна лишняя. Сколько книг было на столе? (Известно, что их было не больше 100.)

24. Найти число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 остаток 2, при делении на 4 остаток 3, при делении на 5 остаток 4, при делении на 6 остаток 5 и при делении на 7 даёт остаток 6.

25. (а) Квадрат целого положительного числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Что это за цифра? (Указать все возможности.) (б) Квадрат целого положительного числа оканчивается на те же две цифры, что и само число. Что это за цифры? (Указать все возможности.) (в) Пятая степень числа оканчивается на ту же цифру, что и само число. Почему? Для каких ещё степеней это верно?

26. Доказать, что для любого целого a число $10a$ даёт при делении на 9 тот же остаток, что и само a.

27. Число a даёт остаток 5 при делении на 9, число b даёт остаток 7 при делении на 9. Можно ли по этим данным определить, какой остаток дают числа $a+b$ и ab при делении на 9?

28. Доказать, что число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 3 и 9.

29. Сформулировать и доказать признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 11.

30. Верен ли такой признак делимости на 27: число делится на 27 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 27?

31. Целое положительное число увеличили на 1. Могла ли сумма его цифр (а) возрасти на 8? (б)Уменьшиться на 8? (в) Уменьшиться на 10?

32. Какие остатки может давать точный квадрат при делении на 4?

33. Последняя цифра точного квадрата равна 6. Доказать, что его предпоследняя цифра нечётна.

34. Остаток от деления простого числа на 30 — простое число или 1. Почему?

35. Какое наибольшее число различных целых чисел можно выбрать, если требуется, чтобы сумма и разность любых двух из них не делились на 15?

36. Существуют ли целые x, y, для которых (а) $x^2 + y^2 = 99$? (б) $x^2 + y^2 = 33333$? (в) $x^2 + y^2 = 5600$?

37. Докажите, что из любых n целых чисел всегда можно выбрать несколько, сумма которых делится на n (или одно число, делящееся на n).

12-14 Основная теорема арифметики

Натуральное число $p > 1$ называется *простым*, если оно имеет ровно два натуральных делителя: 1 и p, в противном случае оно называется *составным.*

38 (Евклид)**.** Простых чисел бесконечно много.

Теорема 0.1 (Основная теорема арифметики)**.** *Для каждого натурального числа $n > 1$ существует и единственно (с точностью до порядка сомножителей) его представление в виде $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — простые сомножители.*

39 (Существование)**.** Докажите что для каждого натурального числа $n > 1$ найдутся такие простые числа $p_1, \ldots, p_k$, что $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$.

40 (Единственность: доказательство «от противного»)**.** Предположим, что n — минимальное натуральное число, большее 1, у которого есть два различных разложения в произведение простых: $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ и $n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$, где $p_1 \le \cdots \le p_k$, $q_1 \le \cdots \le q_s$ — простые числа. Докажите, что
(а) $n \ge p_1^2, n \ge q_1^2$; (б) $n > p_1 q_1$; (в) $p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ делится на q_1 (*Указание:* рассмотрите число $n - p_1 q_1$);

(г) пункт в) противоречит нашему предположению.

Другие доказательства теоремы опираются на такое свойство простых чисел:

Лемма Евклида. Для любого простого числа p верно следующее утверж
(*)

41. Выведите единственность разложения из леммы Евклида

42. (а) Докажите, что лемма Евклида следует из такого утверждения: для простого числа p и числа a, не делящегося на p найдутся такие целые числа x и y, что $ax + py = 1$. (б) Покажите, что утверждение из пункта (а) равносильно утверждению: a обратим по модулю p.

43. Пусть m и n — ненулевые целые числа, $mn\,\vdots\,p$ и $(m,p) = 1$. Рассмотрим множество J всех таких целых чисел j, что $mj\,\vdots\,p$. Докажите, что (а) Если $a, b \in J$, то $a + b \in J$.

(б) Если $a \in J$, $b \in \mathbb{N}$ то $a \cdot b \in J$.

(в) Если $a, b \in J$, то остатки от деления a на b лежит в J.

(г) Пусть x — наименьшее положительное число в J. Тогда все числа из J делятся на x.

(д) x из предыдущего пункта равен p.

(е) $n\,\vdots\,p$, откуда следует лемма Евклида.

15 Приложения основной теоремы арифметики

44. (а) [Решето Эратосфена] Выпишем целые числа от 2 до n. Подчеркнём 2 и сотрём числа, кратные 2. Первое неподчёркнутое число подчеркнём и сотрём кратные ему, и т. д., пока каждое число от 2 до n не будет подчёркнуто или стёрто. Докажите, что мы подчеркнём в точности простые числа от 1 до n. (б) Пусть очередное число, которое мы хотим подчеркнуть, больше $\sqrt{n}$. Докажите, что нестёртые к этому моменту числа от 2 до n простые. (в) Какие числа, меньшие 100, простые?

45. Числа a, b, c, n натуральные, $(a,b)=1$, $ab=c^n$. Найдется ли такое целое x, что $a=x^n$?

46. Решите в натуральных числах уравнение $x^{42}=y^{55}$.

47. Найдутся ли такие 10 разных целых чисел, ни одно из которых не квадрат целого числа, со свойством: квадратом целого числа будет произведение (а) любых двух из них; (б) любых трёх них?

48. Найдите каноническое разложение числа (а) 2018; (б) 17!; (в) C_{20}^{10}.

49. При каких натуральных k число $(k-1)!$ не делится на k?

50. (а) [Теорема Лежандра] Докажите, что простое число p входит в каноническое разложение числа $n!$ в степени $[n/p]+[n/p^2]+[n/p^3]+\ldots$ (где $[x]$ — это *целая часть* числа x). С какого момента слагаемые в этой сумме станут равными нулю?
(б) Сколько у 2000! нулей в конце его десятичной записи? (в) Может ли $n!$ делиться на 2^n $(n \geq 1)$?

51. Докажите, что существует бесконечное число простых чисел вида (а) $3k+2$; (б) $4k+3$.

52. Может ли быть целым число
(б) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}$; (в) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{1}{2n+1}$?

Наименьшим общим кратным ненулевых целых чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b. Обозначение: $[a, b]$.

53. (а) Как, зная канонические разложения чисел a и b, найти (a, b) и $[a, b]$? (б) Найдите $[192, 270]$. (в) Докажите, что $ab = (a, b) \cdot [a, b]$. (г) Верно ли, что $[a, b]/a$ и $[a, b]/b$ взаимно просты?

54. Докажите, что любое общее кратное целых чисел a и b делится на $[a, b]$.

55. Про натуральные числа a и b известно, что $(a, b) = 15$, $[a, b] = 840$. Найдите a и b.

56. Найдите (1, 2, 3, ... , 99)/(2, 4, 6, ... , 200).

57. Пусть $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n. Обозначим через $\tau(n)$ и $S(n)$ соответственно количество и сумму натуральных делителей числа n.
(а) Найдите $\tau(p_1^{\alpha_1})$. (б) Верно ли, что $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$, если $(a, b) = 1$? (в) Найдите $\tau(n)$.
(г) Найдите $S(p_1^{\alpha_1})$. (д) Верно ли, что $S(ab) = S(a)S(b)$, если $(a, b) = 1$? (е) Найдите $S(n)$.

58. Какие натуральные числа делятся на 30 и имеют ровно 20 натуральных делителей?

59. Число n натуральное. Докажите, что количество упорядоченных пар натуральных чисел $(u; v)$, где $[u, v] = n$, равно количеству натуральных делителей у числа n^2.

60. Натуральное число называется *совершенным,* если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, меньших его самого. Докажите, что чётное число n совершенно тогда и только тогда, когда найдется такое простое p, что $2^p - 1$ также простое, и $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

16-18 Линейные уравнения. Цепные дроби

61. Решите в целых числах уравнения: (а) $6x-5y=0$; (б) $6x-6y=2$; (в) $6x-5y=3$.

62. Вычислите при помощи алгоритма Евклида: (а) НОД$(91,147)$; (б) НОД$(-144,-233)$.

63. Покажите, как при помощи алгоритма Евклида можно по произвольным a и b найти такие k и l, что $ak+bl=$ НОД(a,b).

64. Решите уравнения: (а) $121x+91y=1$; (б) $-343x+119y=42$; (в) $111x-740y=11$.

65. Разложить в цепную дробь числа (а) $15/4$; (б) $42/31$; (в) $13/9$; (г) $6/5$.

66. Используя разложение в цепную дробь решить уравнение в целых числах (а) $57x-89y=16$; (б) $13x-10y=27$.

67. Докажите, что уравнение $ax+by=d$ имеет решение в целых числах тогда и только тогда, когда НОД$(a,b)\mid d$. В частности, НОД(a,b) — это наименьшее натуральное число, представимое в виде $ax+by$.

68. Кузнечик может прыгать на расстояние 15 и 7. Изначально он находится в точке 0. (а) Найдите, как следует прыгать кузнечику, чтобы оказаться в точке 3. (б) Найдите, за какое наименьшее число прыжков он может попасть в точку 6;

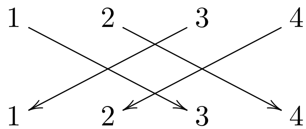
69. Пусть (x_0,y_0) — решение уравнения $ax+by=d$. Пусть a_0 и b_0 — такие числа, что НОД$(a,b)a_0=a$, НОД$(a,b)b_0=b$. Покажите, что каждое решение уравнения $ax+by=d$ имеет вид $x=x_0+b_0\cdot t$, $y=y_0-a_0\cdot t$, где t — целое число.

70. Известно, что пары чисел (x_1,y_1) и (x_2,y_2) являются решением уравнения $ax+by+c=0$, где a,b,c - некоторые неизвестные целые коэффициенты. Найдите, выразив через $(x1,y1)$ и $(x2,y2)$, чему равно a/b.

21-25 Перестановки

Перестановкой чисел $1, 2, \ldots, n$ называется биективное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ на себя. Перестановки записывают в виде таблиц; например, перестановка $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 2$ записывается как $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. В верхней строке числа обычно располагают в порядке возрастания; под ними пишутся их образы, так что произвольная перестановка σ чисел $1, 2, \ldots, n$ запишется как $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Для наглядности, ту же перестановку можно изобразить картинкой вида



Произведение перестановок определяется как композиция отображений: $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. Перестановки σ и τ *коммутируют*, если $\sigma\tau = \tau\sigma$. *Единичная перестановка* (обозначается id) — это тождественное отображение, при котором все элементы остаются на месте. *Обратная* к перестановке σ перестановка определяется соотношением $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \mathrm{id}$.

71. (а) Сколько существует перестановок чисел $1, 2, \ldots, 5$? Сколько из них оставляют число 1 на месте? (б) Сколько из них переводят 1 в 5? (в) Для скольких из них $\sigma(1) < \sigma(2)$? (г) Для скольких из них $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3)$? (д) Сколько существует перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$?

72. Найти произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

73. Укажите две некоммутирующие перестановки.

74. Докажите, что обратная перестановка существует и единственна.

Перестановку, при которой $a_1 \mapsto a_2 \mapsto a_3 \mapsto \ldots \mapsto a_{k-1} \mapsto a_k \mapsto a_1$ (а остальные элементы остаются на месте), называют *циклом длины* k и обозначают $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Циклы длины 2 называют *транспозициями.*

75. Пусть $\sigma = (123)$, $\tau = (34)$. Чему равно $\tau\sigma\tau^{-1}$?

76. Два цикла $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ коммутируют, если они не пересекаются (среди $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_m$ нет общих элементов). Верно ли обратное?

77. Сколько всего циклов длины k в S_n?

78. (а) Доказать, что каждая перестановка представима в виде произведения попарно непересекающихся циклов, причем единственным (с точностью до порядка циклов) образом. (б) Найти это разложение для перестановок из задачи 2.

79. Сколько различных перестановок встречается среди степеней перестановки $(123)(4567)$?

80. (а) Докажите, что произвольный цикл в некоторой степени даст тождественную перестановку. (б) Докажите, что любая перестановка в некоторой степени даст тождественную. Наименьшая из таких степеней называется *порядком.* (в) Найти порядок цикла длины m. (г) Найти все возможные порядки перестановок множества из 7 и 8 элементов.

81. Доказать, что порядок любой перестановки n элементов делит $n!$. Может ли он быть равен $(n!)$?

82. (а) Пусть порядок перестановки равен двум. Разложим её в произведение независимых циклов. Какими могут быть длины этих циклов? (б) Пусть σ — это k-я степень цикла $(1, 2, \ldots, n)$. На сколько независимых циклов раскладывается σ? Каковы длины этих циклов?

83. Доказать, что каждая перестановка представима в виде произведения транспозиций.

Назовём *беспорядком* в перестановке σ пару (i, j), для которой $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. Перестановка σ называется *чётной* (соответственно *нечётной*), если общее число беспорядков чётно (соответственно, нечётно).

84. (а) Докажите, что чётность перестановки при домножении на транспозицию меняется. (б) Пусть перестановка σ разложена в произведение транспозиций. Докажите, что чётность σ совпадает с чётностью числа транспозиции.

85. Для каких k в S_n существует перестановка, у которой ровно k беспорядков?

86. Доказать, что чётных перестановок столько же, сколько нечётных.

87. Найдите максимальный порядок перестановки (а) из S_5; (б) из S_{13}; (в) из S_n.

88. Докажите, что если в игре в 'пятнашки' поменять местами фишки с номерами 14 и 15, то, следуя правилам, невозможно получить первоначальное расположение фишек.

89. В таблице n строк и m столбцов. *Горизонтальный ход* — это любая перестановка элементов таблицы, при которой каждый элемент остается в той же строке, что и до перестановки. Аналогично определяется *вертикальный ход*. За какое наименьшее число горизонтальных и вертикальных ходов всегда удастся получить любую перестановку элементов таблицы?

90. Для скольких перестановок чисел $1, 2, 3, 4$ выполнено равенство (а) $\sigma^2 = \mathrm{id}$? (б) $\sigma = \sigma^{-1}$? (в) $\sigma^2 = \sigma^{-1}$?

91. У отца было 7 дочерей. Всякий раз, когда одна выходила замуж, каждая её старшая сестра, оставшаяся в невестах, жаловалась отцу, что нарушен обычай выходить замуж по старшинству. После того, как вышла замуж последняя дочь, оказалось, что отец услышал всего 7 жалоб. В каком порядке дочери могли выходить замуж (приведите пример)? Сколько всего таких порядков?

92. В каждой клетке таблицы $2 \times n$ стоит одно из целых чисел от 1 до n, причём в каждой строке стоят разные числа, и в каждом столбце стоят разные числа. Сколько таких таблиц?

93. Текст зашифрован программой, заменяющей взаимно однозначно каждую букву на некоторую другую.

(а) Докажите, что существует такое число k, что текст расшифровывается применением k раз шифрующей программы. (б) Найдите хотя бы одно такое k.

94. Несколько жителей города N хотят обменяться квартирами. У каждого есть по квартире, но каждый хочет переехать в другую (разные люди хотят переехать в разные квартиры). По законам города разрешены только парные обмены: если два человека обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах. Докажите, что можно устроить парные обмены так, что уже через два дня каждый будет жить в той квартире, куда хотел переехать.

26-28 Группа Клейна. Сопряжение, гомоморфизм, подгруппа, ядро.

Перестановка σ *сопряжена* перестановке τ, если есть такая перестановка β, что $\sigma = \beta^{-1}\tau\beta$. Обозначение: $\sigma \sim \tau$.

95. Опишите перестановки, сопряжённые перестановке (13)(24) в S_4.

96. Докажите следующие свойства сопряжённости:

(1) (*рефлексивность*) $\sigma \sim \sigma$.

(2) (*симметричность*) Если $\sigma \sim \tau$, то $\tau \sim \sigma$.

(3) (*транзитивность*) Если $\sigma \sim \tau$ и $\tau \sim \beta$, то $\sigma \sim \tau$.

97. Докажите, что при сопряжении (а) на перестановку (12); (б) на транспозицию; (в) на любую перестановку цикловая структура перестановки не меняется. (г) Если σ и τ — перестановки имеющие одинаковую цикловую структуру, то они сопряжены, причём сопряжение β можно получить, переводить элементы цикла элементы σ в соответствующие циклы в τ.

Множество перестановок, сопряжённых данной называется *классом сопряжённости.*

98. Классы сопряжённости разных элементов либо не пересекаются, либо совпадают.

99. Опишите классы сопряжённости в группе (а) S_3, (б) S_4.

100. Пусть $\sigma \in S_n$. Определим перестановку $\widetilde{\sigma}$ в $S_{n!}$, элементы которой занумерованы перестановками τ_i из S_n, а $\widetilde{\sigma}(i)$ — номер перестановки $\sigma\tau_i\sigma^{-1}$.

(а) Какой перестановке соответствует Id?

(б) В случае $n = 3$ мы получаем перестановку из 6 элементов. Какой элемент получится из (12)? (13)? (123)?

(в) Докажите, в общем случае получается перестановка из $S_{n!}$.

(г) Докажите, что $\sigma(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, σ сохраняет цикловую структуру перестановки.

(д) Если обозначить отображение $\varphi : S_n \to S_{n!}$, где $\varphi(\sigma) = \widetilde{\sigma}$, то $\varphi(\sigma \circ \tau) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau)$.

Отображение f из S_n в S_m называется *гомоморфизмом*, если сохраняется композиция перестановок: $f(\sigma \circ \tau) = f(\sigma) \circ f(\tau)$.

101. (а) Отображение φ, определённое в предыдущей задачи является гомоморфизмом.

(б) φ можно рассматривать не на всех перестановках из S_n, а только на перестановках, входящих в один класс сопряжённости K. Докажите, что φ_K является гомоморфизмом из S_n в $S_{|K|}$.

(в) Докажите, что $\varphi\mid_{(12)}\colon S_3 \to S_3$ — *изоморфизм*, то есть гомоморфизм, в которым нет переходящих в тождественный элемент.

(г) Докажите, что $\varphi\mid_{(123)}\colon S_3 \to S_2$ — отображение знака, то есть чётным перестановкам сопоставляется Id, а нечётным — транспозиция.

Ядром гомоморфизма f из S_n в S_m назовём перестановки, которые переходят в Id. Обозначение $\mathrm{Ker}(f)$.

102. (а) Найдите ядра гомоморфизмов $\varphi\mid_{(12)}$, $\varphi\mid_{(123)}$, $\varphi\mid_{\mathrm{Id}}$.

(б) Докажите, что ядро гомоморфизма — множество, замкнутое относительно умножения, содержит единичную перестановку и к каждой перестановке содержит обратный.

Подгруппой S_n называется множество $G \subset S_n$, который содержит единичный элемент, замкнутое относительно умножение и содержащий обратный элемент к каждому своему элементу.

103. (а) Опишите все подгруппы группы S_3.

(б) Пусть $f : S_n \to S_m$ — гомоморфизм. $\mathrm{Ker} f$ — подгруппа.

(в) Для $\mathrm{Ker} f$ выполнено свойство: если $\sigma \in \mathrm{Ker} f$, $\sigma \sim \tau$, то $\tau \in \mathrm{Ker} f$. Подгруппы, удовлетворяющие этому дополнительному свойству, называются *нормальными*.

(г) Если $(12) \in \mathrm{Ker} f$, то $\mathrm{Ker} f = S_n$.

(д) Опишите нормальные подгруппы группы S_3.

(е) Покажите, что для любой нормальной подгруппы в S_3 есть гомоморфизм, у которой эта подгруппа будет ядром.

104. Рассмотрим отображение $\varphi : S_4 \to S_{24}$, построенный по правилам, изложенным выше. Пусть $f = \varphi\mid_{(12)(34)}\colon S_4 \to S_3$. Опишите ядро этого гомоморфизма.

29-30 Проецирования. Порождаемость группы перестановок.

Рассмотрим две прямые α и β, и точку O. *Проецированием прямой* α на прямую β называется отображение, сопоставляющее точке A прямой α пересечение прямой OA с прямой β.

Двойным отношением четырёх точек A, B, C, D на прямой называется число $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$, где маленькие буквы обозначают длину отрезка X-большая буква, где X — фиксированная точка на прямой.

105. Докажите, что двойное отношение не зависит от выбора точки X.

106. (а) Пусть двойное отношение четырёх точек равно λ. Применяя перестановку $\sigma \in S_4$ к точкам, получаем новое двойное отношение. Покажите, что в результате перестановки λ может перейти в $\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda}{1-\lambda}\}$.

(б) Покажите, что такие преобразования двойного отношения образуют группу S_3 относительно операции композиции.

(в) Покажите, что перестановки S_4, сохраняющие двойное отношение в точности эти перестановки: $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

107. Группа S_n порождается (то есть каждый элемент из S_n может быть представлен в виде композиции элементов данного вида)

(а) транспозициями;

(б) транспозициями вида (12), (23), (34), …, $(kk+1)$, …, $(n+1n)$.

(в) транспозицией (12) и циклом $(12\ldots n)$.

108. Чётные перестановки A_n порождаются тройными циклами.

31-34. Движения плоскости. Скользящая симметрия

Преобразование плоскости α каждой точке x плоскости сопоставляет определенную точку $y = \alpha(x)$ (еще говорят: точку x переводит в точку y). Точка y называется образом точки x при преобразовании α. Говорят, что преобразования α и β равны ($\alpha = \beta$), если для любой точки x ее образы $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ совпадают ($\alpha(x) = \beta(x)$).

Тождественное преобразование id точке x сопоставляет точку $\mathrm{id}(x) = x$.

Обозначение. $\rho(x, y)$ – расстояние между двумя точками x, y на плоскости.

Гомотетия Γ_o^k с центром в точке o и коэффициентом $k > 0$ сопоставляет точке $x \neq o$ точку $\Gamma_o^k(x) = y$, лежащую на луче ox, для которой $\rho(o, y) = k\rho(o, x)$; точку o оставляет на месте ($\Gamma_o^k(o) = o$).

Движением называется преобразование α, сохраняющее расстояния между точками: $\rho(\alpha(x), \alpha(y)) = \rho(x, y)$.

109. В каких случаях гомотетия Γ_o^k является движением?

Параллельным переносом на вектор $\overline{v}$ называется преобразование, сопоставляющее точке x точку $y = x + \overline{v}$.

Поворотом на угол φ *с центром в точке* o называется преобразование, сопоставляющее точке $x \neq o$ такую точку y, что $\rho(o, y) = \rho(o, x)$ и угол $\angle xoy$ (отсчитываемый от луча ox к лучу oy против часовой стрелки) равен φ (с точностью до 2π). Центр поворота остается на месте. *Симметрией относительно прямой* l *(осевой симметрией)* называется преобразование, сопоставляющее точке x симметричную ей точку y относительно оси l. Точка y называется *симметричной точке* x *относительно прямой* l, если перпендикуляр, опущенный на прямую l из точки x, проходит через точку y и $\rho(x, o) = \rho(y, o)$, где o - основание перпендикуляра.

110. Докажите, что (а) параллельный перенос; (б) поворот; (в) осевая симметрия является движением.

Композицией преобразований α и β называется преобразование γ (обычно обозначаемое $\beta \circ \alpha$), которое получается при последовательном применении сначала преобразования α, а потом преобразования β. Иными словами, γ переводит точку x в точку $\gamma(x) = (\beta \circ \alpha)(x) = \beta(\alpha(x))$.

111. Пусть α – осевая симметрия. Чем является преобразование (а) $\alpha \circ \alpha$? (б) $\alpha \circ \alpha \circ \alpha$?

112. Для любых ли преобразований α и β выполняется $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$?

113. Для любых ли движений α и β их композиция $\beta \circ \alpha$ является движением?

114. Чем является композиция двух параллельных переносов на векторы $\overline{v}$ и $\overline{u}$?

115. Пусть $\gamma = \beta \circ \alpha$, где α – поворот на угол $\pi/3$ с центром в точке o, а β – параллельный перенос на вектор $\overline{v}$. Найдите точку $\gamma(a)$, где $a = (\alpha \circ \beta)(o)$.

116. Пусть теперь $\gamma = \alpha \circ \beta$, где α и β – движения из предыдущей задачи. Найдите точку $\gamma(a)$, где $a = (\alpha \circ \alpha \circ \beta)(o)$.

117. Докажите, что движение γ из (а) предпредыдущей задачи (б) предыдущей задачи
является поворотом на угол $\pi/3$.

118. Пусть α – поворот на ненулевой угол φ с центром в точке o, β – параллельный перенос на вектор $\overline{v}$.

(а) Постройте такой равнобедренный треугольник $\triangle oab$ с вершиной в точке o, что $\varphi(a) = b$, $\overline{ba} = \overline{v}$.

(б) Покажите, что a является неподвижной точкой для преобразования $\beta \circ \alpha$.

(в) Покажите, что b является неподвижной точкой для преобразования $\alpha \circ \beta$.

119. Докажите, что

(а) композиция поворота на ненулевой угол φ и параллельного переноса

(б) композиция параллельного переноса и поворота на ненулевой угол φ

является поворотом на угол φ.

120. Зафиксируем произвольную точку o на плоскости. Докажите, что любой поворот α можно представить в виде композиции

(а) $\beta \circ \gamma$,

(б) $\gamma \circ \beta$,

где β – поворот с центром в точке o, а γ – параллельный перенос.

121. К какому виду движения может относится композиция $\alpha_2 \circ \alpha_1$ двух поворотов α_1 и α_2 на углы φ и ψ соответственно?

122. Чем является композиция двух осевых симметрий относительно

(а) двух перпендикулярных прямых?

(б) двух параллельных прямых?

(в) двух прямых, образующих угол $\pi/3$?

123. К какому виду движения может относится композиция двух осевых симметрий?

124. Пусть α – движение плоскости, l – произвольная прямая. Докажите, что все точки прямой l переходят при движении α в точки одной и той же прямой $\alpha(l)$.

125. Пусть α – движение плоскости, x, y – произвольные точки. Докажите, что отрезок $[x, y]$ (отрезок с концами в точках x, y) переходит при движении α в отрезок $[\alpha(x), \alpha(y)]$.

126. Движение α переводит данный отрезок $[x, y]$ в себя, меняя его концы ($\alpha(x) = y, \alpha(y) = x$). Сколько различных движений обладают этим свойством?

127. Движение α переводит треугольник $\triangle\, xyz$ в треугольник $\triangle\, \alpha(x)\alpha(y)\alpha($
Сколько различных движений обладают этим свойством?

Два треугольника, один из которых переводится в другой посредством движения плоскости, называются *равными.*

128. Докажите, что любое движение плоскости α является композицией параллельного переноса, поворота и, возможно, осевой симметрии.

Скользящей симметрией называется композиция симметрии относительно некоторой прямой l и параллельного переноса на некоторый вектор $\overline{v}$, параллельный прямой l.

129. Докажите, что композиция симметрии относительно прямой l и параллельного переноса на вектор $\overline{v}$ является

(а) осевой симметрией, если вектор $\overline{v}$ перпендикулярен прямой l;

(б) скользящей симметрией в любом случае.

130. Чем является композиция поворота вокруг точки o на угол φ и симметрии относительно прямой l, содержащей точку o?

131. Чем является композиция поворота и осевой симметрии?

132. (теорема Шаля). Любое движение плоскости α является либо параллельным переносом, либо поворотом на ненулевой угол, либо скользящей симметрией.

Уроки 35-36. Комплексные числа. Арифметика комплексных чисел [2].

Комплексные числа в алгебраической форме записи имеют вид $a + bi$, где a и b - вещественные, а i называют мнимой единицей, полагая $i^2 = \sqrt{-1}$. Эти числа можно складывать и умножать, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые.

1. Вычислить $(2+3i)+(7-i)$, $(2+3i)(7-i)$, $(1+i)(1-i)$, $(2-3i)(3+2i)$ и $2(4+3i)-3(2-i)$.

2. Вычислить $(-i)^2$ и i^{10}.

3. Вычислить $(1+i)^{10}$ и $(1-i)^{10}$.

4. Вычислить $(1+i)^{101}$.

5. Найти два комплексных числа, сумма и произведение которых равны 2.

6. Найти комплексное число z, для которого $z(1+i)=1$.

7. Найти комплексное z, при котором $z(2+3i)=3-2i$.

8. Найти комплексное z, при котором $z(1+i)=3+4i$.

***

9. Найти z, при котором $z(2+3i)=5+4i$. Указание: можно искать z в виде $a+bi$ и составить систему уравнений с двумя неизвестными a и b.

10. Найти сумму $1+i+i^2+i^3+...+i^{100}$.

11. Вычислить $(\sqrt{3}+i)^{30}$.

12. Найти z, для которого

а) $z^2=2$;

б) $z^2=-2$;

в) $z^2=2i$.

13. Найти z, для которого $z^2=1+i$.

14. Найти z, для которого $z^2+2z+2=0$.

15. Найти все $z=a+bi$, для которых $z^3=-1$.

[2] Задачи к листкам 35-42 составлены Илларионом Домелашвили

Уроки 37-38. Комплексная плоскость. Геометрия комплексных чисел.

Комплексное число $z = a + bi$ можно рассматривать как точку на плоскости с координатами (a, b). Ось абсцисс называют *действительной* осью; на ней лежат действительные числа. Ось ординат называют *мнимой* осью; на ней лежат *чисто мнимые* комплексные числа. *Модулем* комплексного числа z называется длина отрезка Oz (расстояние от начала координат до z); *аргументом* этого числа называется угол, образуемый отрезком Oz с осью абсцисс, отсчитываемый против часовой стрелки. Принятые обозначения: $|z|$ - для модуля, $\arg z$ - для аргумента.

1. Какое преобразование плоскости переводит

а) z в $2z$;

б) z в $z + 1$;

в) z в $\bar{z}$;

г) z в $-z$;

д) z в $-\bar{z}$;

е) z в iz ?

2. Где находятся точки z, для которых $z + \bar{z} = 1$?

3. Где находятся точки z, для которых $z \cdot \bar{z} = 1$?

4. Доказать, что $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

5. Вывести формулу для расстояния между числами z и w.

6. Где находятся числа z, для которых

а) $|z| = 1$;

б) $|z - 1| = 1$;

в) $|z| = |z + 1|$?

7. Доказать, что $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ для любых комплексных z и w.

8. Найти действительную и мнимую части числа z, если $|z| = 2$ и $\arg z = 60°$. Найти действительную и мнимую части чисел z^2 и z^3.

9. Вывести формулы для действительной и мнимой частей числа с модулем r и аргументом φ.

***

10. Для данного z найти w, при котором точки 0, z, iz и w лежат в вершинах квадрата.

11. Доказать, что точки 0, $1/z$ и $\bar{z}$ лежат на одной прямой.

12. Доказать, что точки z, для которых $z + \bar{z} = z \cdot \bar{z}$, лежат на одной окружности, и найти её центр и радиус.

13. Доказать, что точки, для которых число $z/(z-1)$ является чисто мнимым, лежат на одной окружности, и найти её центр и радиус.

14. Найти все z, для которых $|z-3| \leqslant 2$ и $|z+4i| \leqslant 3$.

15. Найти комплексное число α, при котором преобразование $z \to \alpha z$ есть поворот на $45°$. Чему равен квадрат этого числа?

16. Доказать, что преобразование $z \to (1+i)z$ увеличивает все расстояния в одно и то же число раз, и найти это число.

17. Как найти четвёртую вершину параллелограмма, если три его вершины совпадают с точками u, v и w комплексной плоскости? Указать все возможности.

18. Где находится точка пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки u, v и w комплексной плоскости?

19. Вывести формулу для преобразования комплексной плоскости, являющегося симметрией относительно прямой $\mathrm{Re}\ z = \mathrm{Im}\ z$.

Уроки 39-40. Арифметика комплексных чисел. Сопряжённые числа. Деление.

Действительные числа a и b называют *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа $z = a+bi$. Принятые обозначения: $a = \mathrm{Re}\ z$, $b = \mathrm{Im}\ z$. *Сопряжённым* к числу $z = a + bi$ называется число $\bar{z} = a - bi$.

1. Вычислить действительную и мнимую части суммы и произведения чисел $a + bi$ и $c + di$.

2. Доказать, что для любого z сумма $z + \bar{z}$ и произведение $z \cdot \bar{z}$ действительны, то есть имеют нулевую мнимую часть.

3. Доказать, что $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ и что $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

4. Вычислить $(1 + i)/(1 - i)$ и $(8 + i)/(1 + 2i)$. Указание: можно либо решить систему уравнений, либо домножить числитель и знаменатель на сопряжённое к знаменателю число.

5. Найти общую формулу для частного $(a + bi)/(c + di)$.

6. Для каких z найдётся такое w, что $z \cdot w = 1$?

7. Доказать, что если $z \cdot w = 0$, то $z = 0$ или $w = 0$.

8. Доказать, что если $z^2 = w^2$, то $z = w$ или $z = -w$.

9. Найти все комплексные числа, для которых $z^2 = 2i$.

10. Доказать, что $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$.

***

11. Доказать тождество $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

12. Доказать, что если два целых числа представимы в виде суммы двух квадратов (например, $2 = 1^2 + 1^2$ и $13 = 2^2 + 3^2$), то их произведение обладает этим же свойством.

13. Доказать, что число $2a$ представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда в этом виде представимо число a.

14. Доказать, что если сумма и произведение двух комплексных чисел вещественны, то эти числа либо оба вещественны, либо сопряжены.

15. Найти все комплексные числа z, для которых $z^2 + z + 1 = 0$.

16. Найти все комплексные числа z, для которых $z^3 = 1$.

Уроки 41-42. Геометрия комплексных чисел. Умножение и повороты. Извлечение корней.

Алгебраические операции над комплексными числами можно рассматривать как *преобразования* плоскости, то есть взаимнооднозначные отображения плоскости на себя. *Гомотетией* называют преобразование плоскости, заданное центром O и коэффициентом $k \neq 0$, переводящее каждую точку z в такую точку w, что $\overrightarrow{Ow} = k \cdot \overrightarrow{Oz}$.

1. Доказать, что для любого комплексного α преобразование $z \to \alpha z$ увеличивает все расстояния в одно и то же число раз, и найти это число.

2. Что можно сказать о преобразовании $z \to \alpha z$, если число α действительное?

3. Что можно сказать о преобразовании $z \to \alpha z$, если $|\alpha| = 1$?

4. При каком числе α преобразование $z \to \alpha z$ будет поворотом на 30° вокруг начала координат?

5. Доказать, что преобразование $z \to \alpha z$ есть композиция гомотетии с коэффициентом $|\alpha|$ и поворота на угол $\arg \alpha$.

6. Доказать, что преобразование поворота на угол φ вокруг начала координат задаётся формулой $z \to z(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

7. Куда переходит точка $z = 1$ при повороте на угол φ, а затем на угол ψ в том же направлении? Вывести формулы для $\cos(\varphi+\psi)$ и $\sin(\varphi+\psi)$.

8. Доказать, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

9. Как найти модуль и аргумент частного z/w, зная модули и аргументы комплексных чисел z и w ?

10. Вывести формулы для $\cos(\varphi - \psi)$ и $\sin(\varphi - \psi)$.

11. Вывести формулы для $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ с помощью комплексных чисел, возведя $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в куб.

12. Доказать, что комплексные числа z, для которых $z^3 = 1$, являются вершинами правильного треугольника.

13. Доказать, что для любого целого $n > 2$ и любого комплексного α корни уравнения $z^n = \alpha$ являются вершинами правильного n-угольника.

***

14. При каких a и b преобразование $z \to az + b$ является поворотом на 45° вокруг точки $1 = 1 + 0i$?

15. Числа 0 и z являются вершинами правильного треугольника. Где может находиться третья его вершина?

16. Числа 0 и z являются вершинами квадрата. Где могут находиться две другие его вершины?

17. Найти все корни уравнения $z^5 = 1$. Указание: в ответе могут остаться квадратные корни, но не должно быть синусов и косинусов.

18. Доказать, что сумма всех n корней уравнения $z^n = 1$ равна нулю.

19. Найти произведение всех n корней уравнения $z^n = 1$.

20. Доказать, что все корни уравнения $z^n = 1$ являются степенями некоторого из них. Замечание: корень с таким свойством называется *первообразным* корнем.

21. Сколько существует первообразных корней степени 12 из единицы?

22. Сколько существует первообразных корней степени 1001 из единицы?

23. При каких a и b преобразование $z \to az + b$ является

а) поворотом;

б) параллельным переносом;

в) осевой симметрией?

24. При каких a и b преобразование $z \to a\bar{z} + b$ является осевой симметрией?

25. Найти все значения корня:

а) $\sqrt[3]{-i}$;

б) $\sqrt[4]{-16}$;

в) $\sqrt[5]{1+i}$.

Уроки 43-50. Гауссовы целые числа. Делимость. ОТА. Представление в виде суммы квадратов. Пифагоровы тройки.

Гауссовыми целыми числами называются комплексные числа вида $a+bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Множество таких чисел обозначается через $\mathbb{Z}[i]$.

133. Покажите, что в $\mathbb{Z}[i]$ сложение и умножение не выходит за рамки $\mathbb{Z}[i]$.

134. (а) Какие элементы $x \in \mathbb{Z}[i]$ являются обратимыми, то есть найдётся такой элемент $y \in \mathbb{Z}[i]$, что $x \cdot y = 1$? (б) Покажите, что эти элементы образуют группу по умножению, изоморфную циклической группе из 4 элементов (группе вращения квадрата).

135. Нарисуйте на комплексной плоскости: (а) числа $\mathbb{Z}[i]$; числа, на которые делится z и числа, коротые делятся на z для $z = 1+i, 2+i, 3+i, 3+2i$.

136. Пусть p — простое вида $4k+1$, и пусть x удовлетворяет сравнению $x^2 \equiv -1 \pmod p$. Докажите, что (а) $(a+xb)(a-xb) \equiv a^2+b^2 \pmod p$ при $a, b \in \mathbb{Z}$; (б) среди чисел вида $m+xn$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq m, n \leq [\sqrt{p}]$, найдутся два с равными остатками от деления на p; (в) найдётся ненулевое число $a+bx$, делящееся на p, где $a, b \in \mathbb{Z}$, причём $|a| < \sqrt{p}$ и $|b| < \sqrt{p}$; (г) p представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.

137. Пусть p — простое число вида $4k+3$, числа a и b целые и a^2+b^2 делится на p. Докажите, что a делится на p и b делится на p.

138. Докажите, что произведение чисел, представимых в виде суммы двух квадратов целых чисел, само представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.

139. Сформулируйте и докажите теорему о том, как по разложению числа на простые множители узнать, представимо ли это число в виде суммы двух квадратов целых чисел.

Будем говорить, что a делится на b с частным q и остатком r, если $a = bq + r$ и $N(r) < N(b)$.

140. (а) Пусть $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$. Пусть q — ближайшая точка решётки $\mathbb{Z}[i]$ к числу $\frac{a}{b}$. Тогда q — частное при делении a на b с остатком. Как найти r? (б) Докажите, что $r = 0$ или $N(r) < N(b)$.

141. (а) Пусть $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$. Тогда $\frac{a}{b}$ можно записать в виде $\alpha + \beta u$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. (б) Рассмотрев ближайшие целые к α и β, найдите частное q и остаток r от деления a на b. (в) Докажите, что $N(r) < N(b)$.

142. Продемонстрируйте, что в гауссовых числах алгоритм Евклида для чисел a, b останавливается, в конце получается общий делитель d чисел a, b, которое линейно выражается через изначальные два числа.

143. Примените алгоритм Евклида для следующих гауссовых чисел: (а) $7 - i$ и $-4 + 7i$; (б) $5 + 3i$ и $6 - 4i$. (в) 7 и $3 + i$. (г) $10 + i$ и $3 + 4i$.

144. Для гауссовых чисел выполнена основная теорема арифметики.

145 (Неразложимые гауссовы числа)**.** Пусть p — простое целое число. (а) Если $p = 4k+3$, то p — неразложим в $\mathbb{Z}[i]$. (б) Если $p = 4k+1$, то p — разложим в $\mathbb{Z}[i]$. (в) Если $p = 4k + 1$, то $p = z\overline{z}$, где z — неразложим в $\mathbb{Z}[i]$. (г) Неразложимые элементы $\mathbb{Z}[i]$, не описанные в предыдущих пунктах — $1 \pm i$.

146. Разложите следующие гауссовы числа в произведение неразложимых: (а) $7 + i$; (б) $11 + 2i$.

147. Пусть a, b, c — такие взаимно простые целые числа, что $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что $c = |z|^2$ для некоторого $z \in \mathbb{Z}[i]$.

148. Укажите все тройки целых чисел $a, b, c \in \mathbb{Z}$, таких что $a^2+b^2 = c^2$. (То есть напишите формулу, которая дает все такие тройки при подстановке в нее целых чисел)

Уроки 51-54. Конечная арифметика. Теорема Безу. Теорема о корнях многочлена.

149. Опишите группу остатков по сложению и умножению по модулю от 2 до 10.

150. Решите уравнение $x^2 = 1$ в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ для $2 \leq m \leq 10$.

151. Разделите многочлен $5x^5 - x^3 + 3x - 2$ на $x - 3$ в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ для $m = 7, 11, 13, 17, 19$.

Пусть A и B — многочлены, причем $\deg B > 0$. Разделить A на B с остатком значит найти такие многочлены Q и R, что $A = BQ + R$, где либо $R = 0$, либо $\deg R < \deg B$.

152. Пусть $m = p$ — простое число. Покажите, что в $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ верны следующие утверждения.

(а) Докажите, что деление многочленов с остатком всегда возможно.

(б) Докажите, что при делении с остатком многочлены Q и R определяются однозначно.

(в)[Теорема Безу] Докажите, что остаток от деления многочлена $A(x)$ на двучлен $x - a$ равен значению многочлена $A(x)$ при $x = a$.

153. (а) Остаток от деления $A(x)$ на $x - 1$ равен 5, а на $x - 3$ равен 6. Найдите остаток от деления $A(x)$ на $(x - 1)(x - 3)$.

(б) Найдите остаток от деления x^1000 на $x^2 + x - 1$.

154. Найдите НОД многочленов: (а) $x(x-1)^3(x+2)$ и $(x-1)^2(x+2)^2(x+5)$; (б) $3x^3 - 2x^2 + x + 2$ и $x^2 - x + 1$; (в) $x^m - 1$ и $x^n - 1$; (г) $x^m + 1$ и $x^n + 1$.

155. Многочлен с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ имеет корней не больше, чем степень.

156. Разложите на неприводимые множители над $\mathbb{R}$ и на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$: (а) $5x + 7$; (б) $x^2 - 2$; (в) $x^3 + x^2 + x + 1$; (г) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; (д) $x^3 + 3$; (е) $x^4 + 4$.

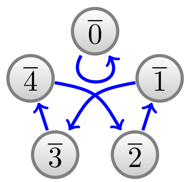
55-58 Формула Виета, малая теорема Ферма, критерий Вильсона

157. (а) Пусть многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + b^x + c$ раскладывается на линейные множители (то есть многочлены первой степени): $P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$. Докажите, что справедливы формулы Виета: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -a, \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1 = b, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -c$. (б) Найдите подобные формулы, если $\deg P = n$ и P раскладывается на линейные множители.

158. (а) Пусть $a + b + c > 0, ab + bc + ac > 0$, $abc > 0$. Докажите, что a, b и c положительны. (б) Пусть $a+b+c < 0$, $ab+bc+ac < 0$, $abc < 0$. Какие знаки могут иметь числа a, b, c?

159. (а) Пусть число $c \neq 0$. Докажите, что многочлен $x^5+ax^2+b^x+c$ не может раскладываться на пять линейных множителей. (б) Та же задача для многочлена $x^5 + ax^4 + bx^3 + c$.

160. (а) Коэффициенты многочлена $(x-a)(x-b)$ целые. Докажите, что $a^n + b^n$ целое при $n \in \mathbb{N}$. (б) Найдите первые n цифр после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{26} + 5)^n$.



161. Изобразим элементы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ точками, зафиксируем $\alpha \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ и из каждой точки ω проведём стрелку в точку $\alpha \cdot \omega$. Нарисуйте такие картинки для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ при $m = 6$ и $m = 7$. (На рисунке — пример для $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\alpha = \overline{3}$.)

162. Число p простое. Докажите, что C_p^k делится на p, если $0 < k < p$.

163 (Малая теорема Ферма)**.** Пусть p — простое, n — целое. (а) Докажите индукцией по n, что $n^p - n$ делится на p. (б) Докажите, что если $(n, p) = 1$, то $n^{p-1} - 1$ делится на p.

164. Пусть $(a, p) = 1$ и p — простое. (а) Докажите, что числа a, $2a$, $\ldots$, $(p-1)a$ имеют разные ненулевые остатки от деления на p. (б) Выведите из пункта а) малую теорему Ферма.

165. Докажите, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

166. (а) Числа p и q простые, $2^p - 1$ делится на q. Докажите, что $q - 1$ делится на p. (б) Простое ли $2^{13} - 1$? (в) Простое ли число $257^{60} + 60$?

167. Пусть p не равно 5. Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на p.

168. Пусть p простое. (а) Докажите, что для каждого ненулевого остатка a от деления на p найдётся такой остаток b от деления на p, что $ab \equiv 1(\mathrm{mod} p)$. (б) Для каких a из предыдущего пункта $b = a$? (в) Докажите, что сравнение $x^2 \equiv a \pmod p$ имеет не больше двух корней. (г) Что будет с этим сравнением в случае не простого модуля m? (д)Решите сравнение $x^2 \equiv 1 \pmod p$. (е) [Критерий Вильсона] Докажите, что $(p-1)! + 1$ делится на p тогда и только тогда, когда p — простое.

169 (Второе доказательство критерия Вильсона)**.** Сколькими способами можно провести через вершины правильного p-угольника замкнутую ориентированную p-звенную ломаную? (Ломаные, которые можно совместить поворотом, считаются одинаковыми.)

170 (Третье доказательство критерия Вильсона)**.** Рассмотрим многочлен $x^{p-1} - 1$ как многочлен в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. (а) Все ненулевые остатки являются его корнями. (б) Произведение остатков равно -1.

171. Пусть p — простое вида $4k + 1$, и пусть $x = (2k)!$. Докажите, что $x^2 \equiv -1 \pmod p$.

59 Отображения.

Правило f, сопоставляющее каждому элементу x множества X некоторый элемент y множества Y, называется *о*тображением из множества X в множество Y.
Обозначения: $f\colon X \to Y$; $f(x) = y$; $x \overset{f}{\mapsto} y$.

172. Какие из следующих соответствий задают отображения между множествами X и Y?

(а) X — множество точек декартовой плоскости, Y — множество точек оси абцисс, точке плоскости ставится в соответствие абцисса этой точки.

(б) $X = Y = \mathbb{N}$, числу $x \in X$ ставится в соответствие число x^2.

(в) $X = Y = \mathbb{Z}$, число $y \in Y$ ставится в соответствие тем числам $x \in X$, для которых $|x| = |y|$.

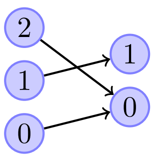
(г) $X = Y = \mathbb{R}$, число $y \in Y$ ставится в соответствие тем числам $x \in X$, для которых $x^3 = y$.

(д) $X = Y = \mathbb{R}$, числу $x \in X$ ставится в соответствие одно такое число $y \in Y$, что $x = y^2$.

Пусть $f\colon X \to Y$, $y \in Y$, $A \subset X$ и $B \subset Y$. Всякий элемент $x \in X$, такой что $f(x) = y$, называется *прообразом* элемента y при отображении f. *Полным прообразом* элемента y при отображении f называется множество $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$. *Образом* множества $A \subset X$ при отображении f называется множество $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. *Прообразом множества* $B \subset Y$ называется множество $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

173. Для каждого отображения из задачи 172 найдите полный прообраз каждого элемента $y \in Y$.

174. Найдите все отображения из множества $\{0, 1, 2\}$ в множество $\{0, 1\}$ (их удобно рисовать, стрелочками обозначая, какой элемент в какой переходит, смотрите пример на рисунке справа).



Отображение $f\colon X \to Y$ называется *взаимно однозначным* или *биекцией*, если для каждого $y \in Y$ найдётся ровно один $x \in X$, такой что $f(x) = y$.

175. Какие из отображений задачи 172 взаимно однозначны?

Отображение f, не « склеивающее» элементы (то есть $f(x) = f(y)$ только если $x = y$) называется *вложением* или *инъекцией* ($A \overset{f}{\hookrightarrow} B$). Отображение $f\colon A \to B$, « покрывающее» все элементы B (то есть $f(A) = B$) называется *наложением* или *сюръекцией* ($A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$).

176. Пусть A и B — конечные множества. Определите в терминах отображений: в множестве A
(а) меньше;
(б) больше элементов, чем в множестве B;
(в) столько же элементов, что и в B.

177. Каких треугольников с целыми сторонами больше:
(а) тех, периметр которых равен 2002, или тех, периметр которых равен 2005?
(б) тех, периметр которых равен 2003, или тех, периметр которых равен 2006?

Композицией отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ называется отображение, сопоставляющее элементу x множества X элемент $g(f(x))$ множества Z. Обозначение: $g \circ f$.

178. Докажите, что для произвольных отображений $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ и $h\colon Z \to W$ выполняется равенство $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.

179. Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Верно ли, что если f и g взаимно однозначны, то и $g \circ f$ взаимно однозначно?

180. Пусть $f\colon X \to Y$ — взаимно однозначное отображение. Докажите, что существует и единственно такое отображение $g\colon Y \to X$, что $g(f(x)) = x$ при любом $x \in X$ и $f(g(y)) = y$ при любом $y \in Y$. Его называют *обратным к* f. Обозначение: f^{-1}.

181. Найдите обратные к тем отображениям задачи 172, которые взаимно однозначны.

182. Докажите, что отображение, обратное к биекции, само есть биекция.

183. Докажите, что между следующими множествами точек на прямой есть взаимно однозначное отображение:
(а) любые два отрезка;
(б) любые два интервала.

184. Найдите $g \circ f$, если
(а) f и g — повороты плоскости относительно одной и той же точки O на углы α и β соответственно.
(б) f и g — симметрии плоскости относительно двух параллельных прямых l_1 и l_2 соответственно.
(в) f и g — симметрии плоскости относительно двух непараллельных прямых l_1 и l_2 соответственно.

185. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество чётных делителей этого числа равно количеству его нечётных делителей.

186. Каких треугольников с целыми сторонами больше:
(а) тех, периметр которых равен 2002, или тех, периметр которых равен 2005?
(б) тех, периметр которых равен 2003, или тех, периметр которых равен 2006?

187. Даны три множества: $\mathbb{N}$, множество четных натуральных чисел и множество натуральных чисел без числа 3. Про каждые два из этих множеств выясните, существует ли взаимно однозначное отображение из первого во второе.

188. Докажите, что между следующими множествами точек на прямой есть взаимно однозначное отображение:
(а) любые два отрезка;
(б) любые два интервала.

189. Пусть $f\colon X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$. Всегда ли верно, что
(а) $f(X) = Y$;
(б) $f^{-1}(Y) = X$;
(в) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
(г) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$;

(д) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
(е) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
(ж) если $f(A_1) \subset f(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$;
(з) если $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$, то $B_1 \subset B_2$.

60-62. Классификация подобий прямой. Подобия плоскости.

Преобразованием подобия с коэффициентом $k > 0$ называется преобразование плоскости, меняющее расстояния между точками ровно в k раз. *Гомотетия* H_O^k с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ переводит каждую точку A в такую точку A', что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

190. Какое преобразование является композицией двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2, если
(а) $k_1 k_2 = 1$;
(б) $k_1 k_2 \neq 1$?

191. (а) Даны два параллельных отрезка разной длины. Укажите все гомотетии, переводящие первый отрезок во второй.
(б) (Замечательное свойство трапеции) Докажите, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

192. Какое преобразование является композицией гомотетии и параллельного переноса?

193. (а) Даны две окружности. Укажите все гомотетии, переводящие первую во вторую.
(б) Даны три окружности различных радиусов. Для каждой пары окружностей нашли точку пересечения их общих внешних касательных. Докажите, что эти три точки лежат на одной прямой.

194. В окружности проведены два непараллельных радиуса. Постройте хорду, которая делится этими радиусами на три равные части.

195. Докажите, что любое преобразование подобия есть композиция гомотетии и движения.

196. Можно ли перевести

(а) любую параболу в любую другую параболу преобразованием подобия;

(б) график функции $y = \sin x$ в график функции $y = \sin^2 x$ преобразованием подобия? А гомотетией?

197. Докажите, что всякое преобразование подобия с коэффициентом, не равным 1,

(а) имеет неподвижную точку;

(б) является композицией гомотетии и поворота с общим центром или композицией гомотетии и симметрии относительно оси, проходящей через центр гомотетии.

198. На стене висят двое часов, одни побольше, другие поменьше. Докажите, что прямые, соединяющие концы минутных стрелок в разные моменты времени, проходят через одну точку.

63-66 Геометрия: обзор того, что было. Векторы и действие группы подобий на них

69-70 Линейные отображения векторов плоскости [3]

Ниже представлены основные определения и задачи к лекции «Линейные отображения векторов плоскости» к курсу «100 уроков математики» Алексея Владимировича Саватеева. Задачи разделены на 2 вида: типовые и нетиповые.

Определение. Пусть $\mathbb{V}$ - линейное пространство над полем $\mathbb{F}$. Отображение A, действующее из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}$, называется *линейным оператором*, если для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ и любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ выполняется равенство $A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y})$.

[3] Автор листков 69-76: Svyatoslav Nikitin

Типовые задачи

1. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ - произвольный вектор n-мерного арифметического пространства. Исследовать линейность преобразования ϕ, если:

а) $\phi(x) = (x_2, x_1 - x_2)^T$ (n = 2)

б) $\phi(x) = (x_2, x_1 x_2)^T$ (n = 2)

в) $\phi(x) = (x_2, x_1 - 3, x_3)^T$ (n = 3)

г) $\phi(x) = (2x_3 + x_1, 2x_3 x_1, x_1 - x_2)^T$ (n = 3)

д) $\phi(x) = (0, 0, ..., 0)^T$

е) $\phi(x) = (0, x_1 + 3x_2, x_2^2)^T$ (n = 3)

ж) $\phi(x) = (0, 0, ..., 0, 1)^T$

з) $\phi(x) = (\sin x_1, \cos x_2, x_3)^T$ (n = 3)

и) $\phi(x) = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)^T$

к) $\phi(x) = (2x_1, 2|x_2|, 2x_3)^T$ (n = 3)

2. Пусть ϕ, ψ, χ - линейные отображения арифметических линейных пространств, α - число. При каких условиях на размерности пространств справедливо каждое из следующих равенств?

а) $\phi(\psi\chi) = (\phi\psi)\chi$

б) $\phi(\psi + \chi) = \phi\psi + \phi\chi$

в) $(\phi + \psi)\chi = \phi\chi + \psi\chi$

г) $\alpha(\phi + \psi) = \alpha\phi + \alpha\chi$

Показать, что матрицы данных отображений удовлетворяют тем же равенствам.

3. Даны линейные отображения $\phi : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$, $\psi : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}_k$.

а) Указать условия на m, n, l, k, необходимые и достаточные для существования произведений $\phi\psi$ и $\psi\phi$.

б) Пусть $\chi = \phi\psi$. Показать, что χ - линейное отображение. Как связаны матрицы отображения ϕ, ψ, χ?

3. Доказать, что произведение (композиция) линейных отображений есть линейное отображение. Проверить свойства ассоциативности и дистрибутивности.

4. Доказать, что ядро и образ линейного отображения являются линейными пространствами.

5. Являются ли линейными следующие отображения $A : L_1 \to L_2$:

а) $Ax = 0$;

б) $L_1 = L_2, Ax = x$ (тождественное отображение; обозначение: Id или E);

в) $L_1 = \mathbb{R}^4, L_2 = \mathbb{R}^3, A(x,y,z,t) = (x+y, y+z, z+t)$;

г) $L_1 = L_2 = \mathbb{R}^3, A(x,y,z) = (x+1, y+1, z+1)$;

д) $L_1 = L_2 = F[x], (Ap)(x) = p(ux^2+v), u, v$ - фиксированные элементы F[x];

е) $L_1 = L_2 = F[x], (Ap)(x) = q(x)p(x), q(x)$- фиксированный элемент F[x];

ж) $L_1{}^{-} -, L_2 = \mathbb{R}, A(x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

6. Найти ядра и образы линейных отображений задачи 5.

7. Пусть A — отображение пространства многочленов сте- пени не выше n с действительными коэффициентами в пространство функций на $M \subset \mathbb{R}$, которое переводит многочлен в его ограничение на M.

а) Доказать, что A линейно.

б) При каких $M ker(A) = 0$?

8. Показать, что каждое из следующих отображений, действующих в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$, является линейным оператором, найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}_1 = (1{,}0{,}0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ и его определитель. Для любого вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

а) $A\mathbf{x} = (-3x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 3x_2 + 2x_3)$

б) $A\mathbf{x} = (-2x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$

в) $A\mathbf{x} = (-3x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 3x_2 + 2x_3)$

г) $A\mathbf{x} = (-3x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 3x_2 + 2x_3)$

д) $A\mathbf{x} = (-3x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 3x_2 + 2x_3)$

е) $A\mathbf{x} = (-3x_1 + 3x_2 - 2x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 - 3x_2 + 2x_3)$

9. Для операторов, действующих в $\mathbb{R}^2$ найти: а) $A-B$; б) $2A+3B$; в) AB; г) BA; д) A^2 е) B^3, если $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

10. Вычислить размерности ядра и образа линейного отображения, заданного матрицей: а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Нетиповые задачи

1. Доказать, что для всякого линейного отображения ϕ существует пара базисов, в которых матрица отображения имеет простейший вид $\left(\begin{smallmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Чему равен порядок матрицы E?

2. В линейном пространстве $\mathbb{F}$ дан базис **e**. Является ли группой относительно умножения данное множество линейных преобразований пространства $\mathbb{F}$?

1) множество всех линейных преобразований;

2) множество всех преобразований, матрицы которых диагональны в базисе **e**;

3) множество всех невырожденных преобразований, которые в базисе **e** задаются целочисленными матрицами, т.е. матрицами $||a_{ij}||$, где a_{ij} - целые числа;

4) множество всех преобразований, матрицы которых в базисе **e** целочисленны и имеют определители, равные 1 или -1;

5) множество всех преобразований с данным определителем d;

6) множество всех невырожденных преобразований, имеющих в базисе **e** матрицы, каждая строка и каждый столбец которых содержат ровно по одному ненулевому элемнету?

3. Пусть A - оператор на конечномерном пространстве. Доказать, что существует многочлен $f \in k[X]$, такой что $f(A) = 0$.

4. Доказать, что оператор обратим тогда и только тогда, когда его определитель не равен нулю.

5. Верно ли, что любое линейное отображение ϕ из векторного пространства $n \times n$ матриц в себя представляется в виде $\phi(X) = A \times B$ для некоторой пары матриц A, B? Однозначен ли выбор A,B?

6. Пусть A и B – две квадратные матрицы одинакового порядка $n \times n$. Доказать, что размерность образа отображения $\phi : \mathbb{K}^2n \to \mathbb{K}^2n$, заданного матрицей удвоенного размера равна сумме размерностей образов отображений A и B.

а) $\begin{pmatrix} A & B \\ 3A & 2B \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} A & AB \\ B & B + B^2 \end{pmatrix}$

7. Линейный оператор на двумерном линейном пространстве имеет в некотором базисе матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что ни в ка-

ком базисе этот оператор не записывается диагональной матрицей.

8. Пусть X - матрица размера $m \times n$, где $mn > 1$. Доказать, что преобразование $X \to X^T$ нельзя представить в виде $X \to A \times B$.

73-74 Арифметика матриц

Ниже представлены основные определения и задачи к лекции «Арифметика матриц» к курсу «100 уроков математики» Алексея Владимировича Саватеева. Задачи разделены на 2 вида: типовые и нетиповые.

Типовые задачи

1. Найти $3A - B - 4C$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Найти $2A - B$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & -15 \\ 1 & -5 & -6 & 11 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 24 & -7 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Найти $AB - BA$ если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Найти $(A - B) \cdot A + 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Показать, что $D(2, \mathbb{Q}) \cap SL(2, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^*$
6. Найти A^3 для следующих матриц:

$$\text{а)}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{б)}A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{в)}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Найти A^n для матрицы $\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Нетиповые задачи

Определение: Матрицы, для которых выполняется равенство $AB = BA$ называются *перестановочными.*

Определение: Целая неотрицательная степень матрицы определяется равенством $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{\text{n раз}}$ **Определение:** Матрица A называется кососимметрической, если она удовлетворяет соотношению $A = -A^T$. Такая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Найти общий вид матриц А второго порядка, квадрат которых равен нулевой матрице, т.е. $A^2 = O$.

2. Найти все матрицы А второго порядка, квадрат которых равен диагональной матрице $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$,$a \neq b$.

3. Найти условие, при котором матрица A второго порядка перестановочна со всеми матрицами второго порядка.

4. Матрица A называется *инволютивной*, если $A^2 = I$, и *идемпотентной*, если $A^2 = A$. Найти общий вид инволютивной и идемпотентной матрицы.

5. Каким условиям должны удовлетворять элементы матрицы A второго порядка, для того чтобы она была перестановочна со всеми диагональными матрицами того же порядка?

6. Найти все степени матрицы А $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Показать на примере матриц второго порядка, что равенство $AB - BA = I$ невозможно.

8. Найти общий вид матрицы A третьего порядка, для которой

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = O$$

9. Найти все матрицы, перестановочные с данными:

$$
\text{а)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{в)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

10. Показать, что матрицы A и B - перестановочны, если

$$
A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

11. Показать, что для любой матрицы A матрица $K = A - A^T$ - кососимметрическая.

75-76 Группа квадратных невырожденных матриц

Ниже представлены основные определения и задачи к лекции «Группа квадратных невырожденных матриц» к курсу «100 уроков математики» Алексея Владимировича Саватеева. Задачи разделены на 2 вида: типовые и нетиповые.

Определение 1. Матрица B называется обратной по отношению к матрице A, если $AB = BA = E$. При этом используется обозначение $B = A^{-1}$. Обратная матрица находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{где}$$

A_{mn} - алгебраическое дополнение элемента матрицы a_{mn}.

Определение 2. Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} определителя n-ого порядка называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} - определитель порядка (n-1), полученный из исходной матрицы вычёркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

Типовые задачи

1. Вычислить определители:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}, \text{б)} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -9 & 6 \end{vmatrix}, \text{в)} \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}, \text{г)} \begin{vmatrix} 1,5 & -0,2 \\ 0,3 & -4 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить определители

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, \text{б)} \begin{vmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 9 & -1 & -5 \end{vmatrix}, \text{в)} \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix}, \text{г)} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 & 6 \\ -7 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 9 & 7 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

3. Вычислить опеределитель Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

Выяснить, при каких значениях x, y, z определитель равен нулю.

4. Вычислить следующие опеределители

$$
\text{а)} \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}, \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \text{в)} \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos 2\beta & \cos^2\beta & \sin^2\beta \\ \cos 2\gamma & \cos^2\gamma & \sin^2\gamma \end{vmatrix},
$$

5. Вычислить определители четвёртого порядка

$$
\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \text{б)} \begin{vmatrix} a & b & b & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \text{в)} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix},
$$

6. Найти матрицы, обратные для следующих:

$$
\text{а)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{в)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

7. Найти матрицы, обратные для следующих:

$$
\text{а)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{б)} \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}, \text{в)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \text{г)} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}
$$

8. Доказать, что определитель диагональной матрицы равен произведению её диагональных элементов.

9. Доказать, что определитель треугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов.

10. Как изменится определитель матрицы, если все элементы матрицы заменить комплексно-сопряженными числами?

11. Вычислить определители матриц:

$$
\text{а)} \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix}, \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix}
$$

при: 1. $\alpha = e^{\pi i/3}$, 2. $\alpha = e^{2\pi i/3}$

12. Доказать, что квадратную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно перевести в единичную тогда и только тогда, когда она невырождена. Сформулировать и доказать аналогичное свойство для элементарных преобразований столбцов матрицы.

13. Матрица A коммутирует с B. Доказать, что тогда A_{-1} коммутирует с B_{-1} (предполагается, что матрицы обратимы).

Нетиповые задачи

1. Придумайте две матрицы C и D так, чтобы: а) $CD = D$; б) $CD = DC$; в) $CD = DC$.

2. Докажите, что матрицу с положительным определителем можно представить в виде произведения матрицы с единичным определителем и константы.

3. Вычислить определители n-ого порядка

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}; \Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

Указание: Показать, что $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. Найти Δ_2 и Δ_3.

4. Как изменится определитель, если все элементы матрицы заменить комплексно-сопряжёнными числами?

5. Пусть det A $\neq 0$. Доказать, что применяя к строкам матрицы элементарные преобразования, сохраняющие определитель, можно получить: а) треугольную матрицу; б) диагональную матрицу

6. Вычислить $detA$, зная, что в матрице A сумма строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами.

7. Доказать, что для любой вещественной матрицы A выполнено условие $det(AA^T) \geq 0$.

8. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечётного порядка равен 0.

9. Показать, что определитель матрицы A порядка n равен нулю, если в ней имеется нулевая подматрицы размеров $k \times l$, и $k + l > n$.

10. Числа 1081, 1403, 2093, 1541 делятся нацело на 23. Не производя вычислений, объяснить, почему det A также делится на 23.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

11. Показать, что вещественная матрица A размера 2011×2011 вырождена тогда и только тогда, когда её можно превратить в $-A$ элементарными преобразованиями вида прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число.

12. В квадратной матрице A столбцы являются попарно ортогональными векторами. Докажите, что абсолютная величина определителя матрицы A равна произведению длин векторов-столбцов.

79-80 Алгебраические числа

199. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Если m или n не являются k-ой степенью натурального числа, то $\sqrt[k]{\frac{m}{n}}$ является иррациональным числом.

Для произвольных чисел x, y рассмотрим множество $A_{(x,y)}$ точек вида $mx + ny$, где m, n — произвольные целые числа, через $B_{(x,y)}$ — множество точек вида $mx + ny$, где m, n — произвольные рациональные числа.

200. Если $\alpha \in A_{(x,y)}$, то и $k\alpha \in A_{(x,y)}$ для любого целого k.

201. Если x, y — целые взаимно простые числа, то $A_{(x,y)} = \mathbb{Z}$.

202. $mx + ny = 0$ при $m, n \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$ тогда и только тогда $\frac{x}{y}$ — рациональное число.

Будем говорить, что $A_{(x,y)}$ *отделено от нуля*, если найдётся $C > 0$, для которого все положительные элементы $A_{(x,y)}$ больше C.

203. Докажите, что α — рациональное число тогда и только тогда, когда

(а) Множество $A_{(1,\alpha)}$ отделено от нуля.
(б) Множество $A_{(1,\alpha)}$ состоит из попарно разных элементов.
(в) Множество $B_{(1,\alpha)}$ состоит из попарно разных элементов.

Множество M на числовой прямой называется *всюду плотным (на числовой прямой)*, если в любом интервале есть хотя бы одна точка из M. Аналогично определяется всюду плотное множество M на окружности (плоскости): любая дуга (круг) содержит хотя бы одну точку из M.

204. По окружности длины 1 по часовой стрелке прыгает кузнечик, все прыжки имеют иррациональную длину α. Пусть M — множество точек, куда может попасть кузнечик. Докажите, что (а) кузнечик никогда не попадёт дважды в одну и ту же точку; (б) любая дуга, содержащая начало, пересекается с M по бесконечному числу точек; (в) M всюду плотно на окружности.

205. Пусть α иррационально. Рассмотрим множество дробных частей чисел вида $n\alpha$, где $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что это множество всюду плотно на отрезке $[0;1]$ (кстати, а что это значит?).

206. Внутри круга запускается точечный бильярдный шар и отражается от границы по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что траектория шара либо зацикливается, либо всюду плотно заполняет (а) граничную окружность; (б) некоторое кольцо.

207. Точечный конь прыгает скачками $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ по плоскости, где в каждой целой точке растет кукуруза (круг с центром в точке). Докажите, что он обязательно сшибет хотя бы один росток (конь сшибает росток только в том случае, если приземляется на него; в прыжках конь ростки не задевает).

Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$. Обозначим через $\mathbb{Q}(\alpha)$ — минимальное поле, которое содержит $\mathbb{Q}$, α, через $\mathbb{Z}[\alpha]$ — минимальное кольцо, которое содержит $\mathbb{Z}$, α.

208. Докажите, что определения, введённые выше корректны (то есть существует минимальное поле/кольцо, содержащее поле/кольцо и α).

209. Докажите, что а) $\mathbb{Z}[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$; б) $\mathbb{Q}(\alpha) = \left\{\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \mid f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x], g(x) \neq 0\right\}$.

210. Докажите, что а) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = A_{(1,\sqrt{2})}$, б) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = B_{(1,\sqrt{2})} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

211. Докажите, что $\sqrt{2}$ — корень многочлена из $\mathbb{Z}[x]$ степени 2, и не является корнем никакого многочлена из $\mathbb{Z}[x]$ степени 1.

85-88 Построение циркулем и линейкой. Вычисление на квадратичном калькуляторе.

212. Пусть даны точки 0 и 1 на прямой. Тогда при помощи циркуля и линейки можно построить отрезок, длина которого (а) произвольное целое число; (б) произвольное рациональное число; (в) $\sqrt{2}$.

213. Пусть даны точки $(0,0)$ и $(1,0)$ на плоскости. Тогда при помощи циркуля и линейки можно построить точку, обе координаты которой (а) произвольное целые числа; (б) произвольное рациональные числа.

(в) Предположим, что мы построили отрезок длины a. Докажите, что мы можем построить отрезок длины $\frac{1}{a}$.

(г) Предположим, что мы построили отрезок длин a, b. Докажите, что мы можем построить отрезок длины $a \cdot b$.

(д) Предположим, что мы построили отрезок длины a. Докажите, что мы можем построить отрезок длины $\sqrt{a}$.

214. Имея 0 и 1 на комплексной плоскости постройте при помощи циркуля и линейки все корни (а) 3, (б) 4, (в) 6, (г) 5 -ой степени из 1.

215. Имея 0, 1, z, w на комплексной плоскости постройте (а) $\overline{z}$; (б) $z \cdot w$; (в) $\frac{z}{w}$ при $w \neq 0$.

216. Покажите, что построение правильного n-угольника равносильно построению числа $\sin \frac{2\pi}{n}$ или $\cos \frac{2\pi}{n}$.

217. Покажите, что (а) построение правильного 5-угольника равносильно построению корня уравнения $x^2 + x + 1 = 0$. (б) при помощи циркуля и линейкой можно отложить угол в 3 градуса. (в) построение правильного 9-угольника при помощи циркуля и линейки равносильно построению угла в 10 градусов.

218. (а) Покажите, что сумма всех корней n-ой степени из 1 равна 0. (б) Найдите сумму квадратов всех корней n-ой степени из 1.

219. Пусть ξ_n — корень n-ой степени из 1, $\xi = \xi_7$. Покажите, что

(а) $\xi + \xi^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$.

(б) Пусть $x = \xi + \xi^{-1}$. Выразите x^2, x^3 через ξ, ξ^{-1} и покажите, что $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$.

(в) Покажите, что многочлен $x^3 + x^2 - 2x - 1$ не раскладывается на множители.

91-92 Канторова теория множеств.

Если A — конечное множество, то через $|A|$ обозначим количество его элементов. Множества A и B называются *равномощными*, если существует биекция из A в B. Обозначение: $A \cong B$.

220. Докажите, что для любых множеств A, B и C:
(а) $A \cong A$; (б) если $A \cong B$, то $B \cong A$;
(в) если $A \cong B$ и $B \cong C$, то $A \cong C$.

Множество называется *счётным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Множество называется *не более чем счётным*, если оно пусто, конечно или счётно.

221. Покажите, что в любом бесконечном множестве найдётся счётное подмножество.

222. Докажите, что (а) любое подмножество счётного множества не более чем счётно; (б) объединение двух счётных множеств счётно; (в) объединение счётного числа счётных множеств счётно.

223. Докажите счётность следующих множеств: (а) множество чётных чисел; (б) $\mathbb{Z}$; (в) $\mathbb{Q}$; (г) множество конечных последовательностей из 0 и 1; (д) множество конечных последовательностей натуральных чисел.

Пусть A и B — два множества. Через B^A обозначается множество всех отображений из A в B.

224. Пусть A и B суть конечные множества, состоящие из n и k элементов соответственно. Сколько элементов в множестве B^A?

225. Пусть A — конечное множество. Докажите, что для любого B множество B^A равномощно $B^{|A|}$ (декартовой степени).

226. Пусть A, B и C — произвольные попарно не пересекающиеся множества. Докажите, что $A^B \times A^C \cong A^{B \cup C}$.

227. Докажите, что если A бесконечно, а B не более чем счётно, то $A \cup B \cong A$.

228 (Теорема Кантора)**.** Могут ли множества A и 2^A быть равномощными?

229. Рассмотрим таблицу из 0 и 1, бесконечную «вправо-вниз». Докажите, что найдётся бесконечная последовательность из 0 и 1, которая не совпадает ни с одной из строк таблицы (казалось бы, причём здесь предыдущая задача?).

230 (Теорема Кантора-Бернштейна)**.** Если множество A равномощно подмножеству B, а B равномощно подмножеству A, то A и B равномощны.

Множества, равномощные множеству действительных чисел, называются *континуальными.*

231. Докажите, что следующие множества попарно равномощны:

(а) отрезок $[0,1]$; (б) интервал $(0,1)$; (в) $\mathbb{R}$; (г) $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (т. е. множество бесконечных последовательностей 0 и 1).

232. Докажите счётность следующих множеств: (а) $\mathbb{Z}[x]$ (множество многочленов от x с целыми коэффициентами). (б) $\mathbb{A}$ (множество алгебраических чисел, т.е. корней многочленов с целыми коэффициентами); (в) $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots]$ (множество многочленов с рациональными коэффициентами от счётного числа переменных); (г) Множество графов с конечным числом вершин.

233. Пусть A, B и C — произвольные попарно не пересекающиеся множества. Докажите, что:

(а) $A^C \times B^C \cong (A \times B)^C$; (б) $(A^B)^C \cong A^{B\times C}$.

234. Докажите, что следующие множества континуальны:

(а) $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2$; (б) $[0,1]^2$; (в) $\mathbb{R}^2$; (г) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; (д) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

235. Докажите, что объединение континуального числа континуальных множество континуально.

236. Докажите, что следующие множества не более, чем счётны:

(а) произвольное множество попарно не пересекающихся интервалов на прямой; (б) произвольное множество попарно непересекающихся «восьмёрок» на плоскости («восьмёрка» — объединение двух касающихся внешним образом окружностей, одна восьмёрка может находиться целиком внутри другой). (в) Произвольное множество попарно непересекающихся “букв Т” на плоскости (т.е. наборов из трёх невырожденных отрезков, имеющих один общий конец и никаких других общих точек); (г) Множество точек разрыва произвольной монотонной функции.

93-100 Начала матанализа

93-94 Вещественные числа. Аксиомы полноты.

95-96 Сечения Дедекинда.

97-98 Число Эйлера.

99-100 Экспонента[4].

Теоретическая часть

В данном листке будет приведено несколько эквивалентных определений аксиомы полноты, обозначаемые буквой **П**.

237. Число $x \in (0;1)$ назовём *вычислимым*, если есть конечный алгоритм (например, программа на Питоне), который позволяет для каждого $n \in \mathbb{N}$ определить n-ый знак после запятой в десятичной записи x.

(а) Докажите, что множество вычислимых чисел из интервала $(0;1)$ счётно.

(б) Выпишем десятичные записи всех вычислимых чисел в таблицу, и диагональным методом построим вычислимое число, не входящее в таблицу. (Это можно сделать, написав программу на Питоне, которая последовательно будет перебирать программы, дающие вычислимые числа, и менять у n-го числа n-ю цифру.) Объясните это противоречие.

П1 Любая последовательность вложенных отрезков имеет непустое пересечение.

Говорят, что задана *последовательность* чисел $x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots$, если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое число x_n. Другими словами, *последовательность* — это произвольная числовая функция, определённая на множестве натуральных чисел, то есть отображение из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$. Обозначение: (x_n).

Последовательность называется монотонно возрастающей (соотв. убывающей), если для всех n выполнено неравенство $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$).

[4]При разработке листков 93-100 использовались задачи в мат. классах 57-й и 179-й школы из разных источников, в основном — листки под авторством Сергея Дориченко и Сергея Шашкова.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если найдётся такое число C, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $x_n < C$.

238. (а) Дайте определение последовательности, ограниченной снизу.

(б) Докажите, что (x_n) *ограничена* (т. е. ограничена и сверху и снизу) тогда и только тогда, когда найдётся такое число $C > 0$, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $|x_n| < C$.

239. Найдите ограниченную последовательность, у которой
(а) есть и наибольший, и наименьший члены; (б) есть наибольший, но нет наименьшего;
(в) есть наименьший, но нет наибольшего; (г) нет ни наименьшего, ни наибольшего.

240. Верно ли, что (а) сумма; (б) разность; (в) произведение; (г) отношение ограниченных последовательностей — тоже обязательно ограниченная последовательность?

П2 Любая монотонная возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.

П2' Любая монотонная убывающая ограниченная последовательность имеет предел.

Число a называется пределом последовательности x_n, если для любого интервала, содержащего a найдётся N, начиная с которого, все члены x_n с $n > N$ лежат в этом интервале. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

Последовательность x_n называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для любых $m, k > N$ выполнено неравенство $|x_m - x_k| < \varepsilon$.

241. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

П3 Любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Подмножество M называют *ограниченным сверху*, если найдётся такое число c, что при любом $x \in M$ верно $x \leq c$ (каждое такое c называют *верхней гранью* M). Аналогично определяют понятия множества, ограниченного снизу и нижней грани. Элемент c называют *точной верхней гранью* множества M, если c является верхней гранью M, но никакой меньший элемент не является верхней гранью M. Обозначение: $\sup M$ (читается « супремум» M).

242. Дайте определение точной нижней грани множества ($\inf M$, « инфимум » M).

243. Докажите, что элемент c есть $\sup M$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия:
1) для всех $x \in M$ верно, что $x \leq c$; 2) для любого элемента $c_1 < c$ найдётся такой $x \in M$, что $x > c_1$.

244. Найдите $\sup M$ и $\inf M$, если $M = \{a^2 + 2a \mid -5 < a \leq 5\}$.

245. Может ли у множества быть несколько точных верхних (нижних) граней?

246. Пусть A и B — некоторые подмножества упорядоченного поля, и пусть известны $\sup A$ и $\sup B$.
(а) Найдите $\sup(A \cup B)$. (б) Найдите $\sup(A + B)$, где $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
(в) Найдите $\inf(A \cdot B)$, где $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$, если A и B состоят из отрицательных элементов.

П4 Любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.

П4' Любое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.

Назовём *с*ечением прямой разбиение точек прямой на два непересекающихся множества A и B, при котором все точки A лежат левее всех точек B, то есть для любых $a \in A$, $b \in B$ выполнено неравенство $a < b$.

П5 Для любого сечения найдётся точка c, лежащая между множествами сечения (то есть не меньше всех точек первого множества и не больше всех точек второго множества).

Неравенства и оценки

247. Что больше: (а) 5^{15} или 15^5; 2^{100} или 10^{30}; (б) 7^8 или 8^7; 3^{500} или 7^{300}?

248. (а) Число x изменили не более, чем на 0,1. Могло ли при этом значение x^2 измениться более, чем на 10? (б) Тот же вопрос для значения $\sqrt{x}$.

249. Коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ изменили не больше, чем на 0,01. Мог ли больший корень уравнения измениться больше, чем на 100?

250. (а) Докажите, что $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$ при $a > 0$. (б) Каково наименьшее значение $a + \dfrac{9}{a}$ при $a > 0$?

251. Десятичная запись числа $a \in \mathbb{N}$ состоит из n цифр. (а) Сколько цифр может быть в десятичной записи числа a^3? (б) Десятичная запись a^3 состоит из k цифр. Возможно ли, что $n + k = 2005$?

252. Решите в натуральных числах: (а) $a!+b!+c! = d!$; (б) $x+y+z = xyz$; (в) $x^2 + 3x = y^2$.

253. В банк кладут 1000 рублей. В каком случае спустя 10 лет получат больше денег: если банк начисляет 5% от имеющейся суммы раз в год или если он начисляет (5/12)% раз в месяц?

254. Докажите, что при всех натуральных n и при всех неотрицательных a выполнены неравенства (а) [неравенство Бернулли] $(1 + a)^n \geq 1 + na$; (б) $(1 + a)^n \geq 1 + an + a^2n(n - 1)/2$.

255. Укажите такое целое $n > 1$, что (а) $1{,}001^n > 10^5$; (б) $0{,}999^n < 10^{-5}$; (в) $\sqrt[n]{n} < 1{,}001$.

Говорят, что неравенство выполнено « при всех достаточно больших n» или « при n много больше нуля», если найдётся такое число k, что это неравенство выполнено при всех $n > k$. Обозначение: неравенство выполнено при $n \gg 0$.

256. (а) Докажите: $n^n > 10^6 \cdot n!$ при $n \gg 0$. (б) Можно ли заменить 10^6 на любое другое число?

257. (а) Докажите, что $0{,}001n^2 > 100n + 57$ при $n \gg 0$. (б) Число C — любое, n и m — натуральные, причём $n > m$. Докажите, что $x^n > Cx^m$ при $x \gg 0$. (в) Дан многочлен $P(x) = p_kx^k + p_{k-1}x^{k-1} + \cdots + p_1x + p_0$, где $p_k > 0$. Верно ли, что $P(x) > 0$ при $x \gg 0$?

258. Докажите, что если $a > 1$ и C — любое, то (а) $a^n > C$ при $n \gg 0$; (б) $a^n > n$ при $n \gg 0$.

259. Верно ли, что (а) $1{,}01^n > 100n$ при $n \gg 0$; (б) если $a > 1$, $C > 0$, то $a^n > Cn$ при $n \gg 0$?

260. (а) Пусть $q > 1$, и последовательность положительных чисел (x_n) такова, что $x_{n+1}/x_n > q$ при $n \gg 0$. Докажите, что $x_n > 1$ при $n \gg 0$. (б) Верно ли утверждение пункта а), если $q = 1$?

261. Докажите, что при натуральных $n \gg 0$ (а) $2^n > n^{100}$; (б) если $a > 1$ и $k \in \mathbb{N}$, то $a^n > n^k$.

262. Докажите, что для любого a неравенство $n! > a^n$ выполнено при $n \gg 0$.

263. (а) Докажите, что $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$ при любом $n \in \mathbb{N}$. (б)[Гармонический ряд] Для любого ли числа C найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что будет выполнено неравенство $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \geq C$? (в) Тот же вопрос для неравенства $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geq C$.

264. Докажите для $n \in \mathbb{N}$: (а) $a^{n+1}/b^n \geq (n+1)a - nb$, если $a, b > 0$; (б) $(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} \geq (1 + \frac{1}{n})^n$; (в) $(1 + \frac{1}{n-1})^n \geq (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$; (г) $2 \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq 4$; (д) $(1+\frac{1}{n})^n \leq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$; (е)[неравенство Коши] $(a_1 + \ldots + a_n)/n \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$, если числа $a_1, \ldots, a_n$ положительны; (ж) $(n/4)^n \leq n! \leq ((n+1)/2)^n$.

265. Пусть $P(x) = x^{n_1} - x^{n_2} + x^{n_3} - x^{n_4} + \dots + x^{n_{2k+1}}$, где $n_1 > n_2 > \dots > n_{2k+1}$ — набор натуральных чисел. Докажите что $P(x) \geq 0$ при всех $x > 0$.

266. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами?

267. Дано положительное число α. Известно, что неравенство $1 < x\alpha < 2$ имеет ровно 3 решения в целых числах x. Сколько решений в целых числах x может иметь неравенство $2 < x\alpha < 3$?

Бесконечно малые последовательности

Последовательность (x_n) называется *бесконечно малой*, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при любом натуральном $n \geq N$ будет выполнено неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

268. Для последовательности (x_n) найдите по данному числу $\varepsilon > 0$ какой-нибудь номер N, начиная с которого верно, что $|x_n| < \varepsilon$, если (а) $x_n = \frac{1}{n}$; (а) $x_n = \frac{2}{n^3}$; (а) $x_n = \frac{\sin n}{n}$; (а) $x_n = \frac{1}{2n^2+n}$.

269. Известно, что последовательности (x_n) и (y_n) бесконечно малые. Составим последовательность x_1, y_1, x_2, y_2, $x_3, y_3, \ldots$ Будет ли эта последовательность бесконечно малой?

270. Докажите, что сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей — бесконечно малая последовательность.

271. Последовательности (x_n) и (y_n) бесконечно малые, а последовательность (z_n) такова, что $x_n \leq z_n \leq y_n$ при всех натуральных n. Докажите, что последовательность (z_n) бесконечно малая.

272. Является ли бесконечно малой последовательность (а) $x_n = \frac{\cos n - 0{,}5^n}{n+7}$; (а) $y_n = \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$?

273. Дана последовательность (x_n) с положительными членами. Верно ли, что (x_n) бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $(\sqrt{x}_n)$ бесконечно малая?

274. Даны две последовательности: (x_n) — бесконечно малая, а (y_n) — ограниченная. Докажите, что (а) $(x_n + y_n)$ — ограниченная последовательность; (а) $(x_n y_n)$ — бесконечно малая последовательность.

275. В бесконечно малой последовательности (x_n) переставили члены (то есть взяли какое-то взаимно однозначное соответствие $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и получили новую последовательность (y_n), где $y_n = x_{f(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$). Обязательно ли полученная последовательность будет бесконечно малой?

276. Последовательность состоит из положительных членов, причём сумма любого количества её членов не превосходит 1. Докажите, что эта последовательность бесконечно малая.

Последовательность (x_n) называется *бесконечно большой*, если для любого числа $C > 0$ найдётся такое число k, что при всех натуральных n, больших k, будет верно неравенство $|x_n| > C$.

277. Последовательность не является ограниченной. Обязательно ли она бесконечно большая?

278. Запишите без отрицания: (x_n) не является (а) бесконечно малой; (а) бесконечно большой.

279. Какие из последовательностей ограничены, какие — бесконечно малые, а какие — бесконечно большие: (а) $x_n = (1,1)^n$; (а) $y_n = (0,9)^n$; (а) $z_n = \sqrt{n^3 + n} - \sqrt{n^3}$; (а) $t_n = \sqrt[n]{n!}$; (а) $s_n = \frac{n^5+1}{n^4+n^2}$?

280. Верно ли, что последовательность (x_n) с ненулевыми членами бесконечно малая тогда и только тогда, когда последовательность $(1/x_n)$ бесконечно большая?

281. Одна последовательность бесконечно большая, а другая бесконечно малая. Что можно сказать (а) о сумме; (а) об отношении; (а) о произведении этих последовательностей?

282. Любую ли последовательность можно представить как отношение
(а) двух ограниченных; (а) двух бесконечно малых последовательностей?

283. Пусть x_n — последовательность, для которой $x_n/x_{n-1} < q$ при всех n. При каких q такая последовательность всегда является бесконечно малой?

284. Есть ли последовательность, члены которой найдутся в любом интервале числовой оси?

285. Для каждого натурального n пусть x_n — сумма чисел вида $1/k$, где k — натуральное, $1 \le k \le n$ и в десятичной записи числа k нет цифры 9. Ограничена ли последовательность (x_n)?

Предел последовательности

Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если (x_n) можно представить в виде $x_n = a+\alpha_n$, где (α_n) — бесконечно малая последовательность. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Говорят также, что (x_n) *стремится к* a *при* n, *стремящемся к бесконечности* (и пишут $x_n \to a$ при $n \to \infty$).

286. Может ли последовательность иметь более одного предела?

287. Найдите предел (x_n), если он есть:

(а) $x_n = 1 + (-0,1)^n$; (б) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$; (в) $x_n = (-1)^n$; (г) $x_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$; (д) $x_n = 1+0,1+\ldots+(0,1)^n$; (е) $x_n = \dfrac{1+3+\ldots+3^n}{5^n}$; (ж) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Окрестность точки a — это любой интервал, содержащий точку a. Обозначение: $\mathcal{U}(a)$.

288. Докажите, что любые две точки на прямой имеют непересекающиеся окрестности.

Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если в любой окрестности числа a содержатся *почти все* члены (x_n) (то есть все, кроме конечного числа).

Число a называют *пределом последовательности* (x_n), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N, что при любом натуральном $k > N$ будет выполнено неравенство $|x_k - a| < \varepsilon$.

289. Докажите эквивалентность определений , и .

290. Запишите без отрицания:

(а) « число a не предел (x_n)»; (б) « (x_n) не имеет предела».

291. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) > 0$. Верно ли, что (а)$x_n > 0$ при $n \gg 0$; (б)$(1/x_n)$ ограничена (если определена)?

292. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Найдите

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm y_n$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n$.

(в) Что можно сказать о $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n$?

293. Найти предел ($n \to \infty$):

(а)$1 + q + \ldots + q^n$, где $|q| < 1$; (б)$\dfrac{n^2 - n + 1}{n^2}$; (в) $\sqrt[n]{2}$; (г)$\dfrac{n^{50}}{2^n}$; (д) $\sqrt[n]{n}$.

294. Может ли последовательность без наименьшего и наибольшего членов иметь предел?

295. (а) Последовательность (x_n) имеет предел. Докажите, что $(x_{n+1} - x_n)$ бесконечно малая. (б) Верно ли обратное?

296. Последовательность (x_n) положительна, а последовательность (x_{n+1}/x_n) имеет пределом некоторое число, меньшее 1. Докажите, что (x_n) бесконечно малая.

297. Найдите:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2}{n^2 + n + 1}$ (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 2n - 2}{n^3 + n}$; (в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^9 - n^4 + 1}{2n^9 + 7n - 5}$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C_n^{50}}{n^{50}}$.

298. Найдите ошибку в рассуждении: « Пусть $x_n = (n-1)/n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - 1/n) = 1$. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1/n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = 0$. Отсюда $0 = 1$.»

299. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $x_n > y_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Верно ли, что

(а) $a > b$; (б) $a \geq b$?

300. Обобщите теорему о двух милиционерах из листка 16 на последовательности, имеющие предел.

301. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Найти

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2}{7}$; (б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^2 + x_n - 2}{x_n - 1}$; (в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n}$.

302. В два сосуда разлили (не поровну) 1 л воды. Из 1-го сосуда перелили половину имеющейся в нём воды во 2-ой, затем из 2-го перелили половину оказавшейся в нём воды в 1-ый, снова из 1-го перелили половину во 2-ой, и т. д. Сколько воды (с точностью до 1 мл) будет в 1-ом сосуде после 50 переливаний?

Число e

303. Пусть (x_n) — последовательность положительных чисел, стремящаяся к a. Докажите[5], что тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует предел последовательности $(\sqrt[k]{x_n})$, равный $\sqrt[k]{a}$.

304. Пусть $a, b > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что выполнено неравенство $\dfrac{a^{n+1}}{b^n} \geqslant (n+1)a - nb$.

305 (о числе e)**.** Докажите, что

(а) последовательность $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает; (б) последовательность $E_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает; (в) $\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} E_n$ (число e по определению равно пределу этих последовательностей); (г) выполнено неравенство $2{,}25 < e < 3{,}375$; (д) Найдите такое n, что $|e - e_n| < 10^{-6}$.

306 (о числе e^r)**.** Докажите, что (а) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$;

(б) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n = e^k$, если число k — целое;

(в) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^n = e^r$, если число r — рационально;

((г))одна из последовательностей $\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^n$ и $\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{n+r}$ монотонно возрастает, другая — монотонно убывает, и пределы обеих последовательностей равны e^r.

[5] Домножение на сопряжённое будет крайне уместно и в этой задаче :)

307. Обозначим сумму $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ через s_n, а число $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ по-прежнему через e_n.

(а) Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство $e_n \le s_n$; (б) Зафиксируем натуральное число N и рассмотрим любое натуральное $n > N$. Раскроем скобки в выражении $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ по биному Ньютона и оставим лишь первые $N+1$ слагаемых. Докажите, что предел полученной таким образом последовательности равен s_N; (в) Докажите, что $s_N \le e$; (г) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} s_n = e$; (д) Докажите, что $\sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i!} \le \frac{1}{m!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{m+1}}$; (е) Найдётся ли $n < 100$ такое, что $|e-s_n| < 10^{-6}$? (ж) Докажите, что для любого $r\in\mathbb{Q}$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\frac{r^i}{i!} = \lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{r^1}{1!}+\ldots+\frac{r^n}{n!} = e^r$.

308. Докажите[6], что $\lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1) = 1$.

309. Пусть (x_n) — последовательность положительных чисел, стремящаяся к a. Докажите, что тогда для любого $k\in\mathbb{N}$ существует предел последовательности $(\sqrt[k]{x_n})$, равный $\sqrt[k]{a}$.

310. Пусть $a, b > 0$ и $n\in\mathbb{N}$. Докажите, что выполнено неравенство $\frac{a^{n+1}}{b^n} \geqslant (n+1)a - nb$.

311. (а) Докажите, что существует предел последовательности $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Число e по определению равно пределу этой последовательности. (б) Докажите, что выполнено неравенство $2{,}4 < e < 3$; (в) Найдите такое n, что $\left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| < 10^{-9}$.

[6]Задача номер 305 здесь удивительным образом поможет

312. Докажите, что

(а) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n = e^r$, если число r — рационально; (б) одна из последовательностей $e_n = \left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$ и $E_n = \left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{n+r}$ монотонно возрастает, другая — монотонно убывает, и пределы обеих последовательностей равны e^r.