Задача. В центре круглого пруда плавает ученик-хулиган. В этот момент к пруду подходит разъярённый учитель. Учитель не хочет мочить одежду, и желает поймать хулигана на берегу, а ученик хочет от него убежать (на берегу его скорость больше, чем скорость учителя). При каких соотношениях максимальных скоростей плаванья ученика и бега учителя ему удастся это сделать?

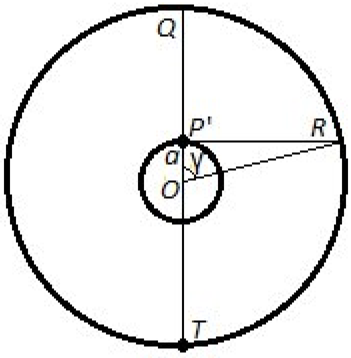


рис. 1

Комментарий: решение выложено на канале у Алексея Савватеева, но там не до конца раскрыта 3-я часть решения, называемая «Задача 3». В данном изложении этот недостаток устранён.

Ответ: любые значение большие *cos(γ)*, где *γ* - решение уравнения *π+γ=tg(γ)* на отрезке [0; *π*/2]. Или 0.21723…

Пусть максимальные скорости учителя и ученика v_1=1 и v_2=*a* соответственно. Центр круга обозначим *O*, радиус круга без ограничения общности равен 1. Положение ученика и учителя в момент времени *t* обозначим *P(t)* и*T(t)*соответственно (далее просто *P* и *T*), а границу пруда - *ω*.

План решения следующий: Мы находим точку *P'*, и соотношение скоростей a_0 такую, что *OP'=OP'/OT* =v_2/ 1 =v_2/v_1=a_0 (здесь момент времени *t* в *T(t)* не играет роли), и придвижении учителя в одном направлении с максимальной скоростью и движении ученика перпендикулярно *OP'* в направлении движения противоположном направлению движения T в первый момент, они приходят в точку на *ω* одновременно. Далее мы показываем, что, если ученик движется из этой точки прямолинейно не пересекая окружность с центром в *O* и радиусом *OP'*, он приходит к *ω* позже учителя.

Затем мы показываем, что при такой или меньшей скорости ученика любая его траектория не приводит его к желаемому результату при правильных действиях учителя.

И наконец, что при большей скорости он убегает, как бы не двигался учитель
Итак, рассмотрим вспомогательную задачу.

Задача 1. Пусть ученик начинает движение в точке *P'*, в момент времени t_0. $\angle P'OT(t_0)$ =180°. *OP'=OP'/OT* =v_2/ 1 =v_2/v_1=a_0, *Q* - пересечение продолжения *OP'* с *ω*, *R* - одна из точек пересечения перпендикуляра проведенного к *OP'* в т. *P'* с *ω*, γ=$\angle P'OR$, причём γ таково, что *π+γ=tg(γ)* .Существует ли точка на *ω* по другую сторону от *P'R*, нежели *O*, куда учитель попадёт раньше ученика в случае равномерного движения по окружности с максимальной скоростью учителя и прямолинейного ученика (скорости - максимальные)?

Решение задачи 1.

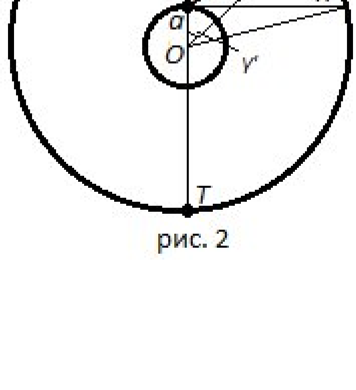


рис. 2

Заметим, что в этом случае время, за которое учитель, двигаясь по длинной дуге, попадёт в *R* будет *π+γ*,а время за которое ученик двигаясь из *P'*попадёт в *R* - *P'R/(*v_1 */*v_2*)==P'R/(OP'/1)=tg(γ)*. Таким образом, в случае указанных траекторий они попадут в R одновременно.

Пусть точка, до которой плывёт ученик – *N* (очевидно, что она должна быть по ту же сторону от *OP’*, что и *R*). *S* - точка на $P'Q$ такая, что $P'Q \perp SN$. $SP'=h$. $\angle QON = \gamma'$

Покажем, что производная по h разности 2 функций: времени, которое потребуется учителю, чтобы дойти до искомой точки (функция f), и времени, которое потребуется ученику чтобы до неё доплыть, равна 0 только в т. h=0. Поскольку наша функция $f(0)$ также равна 0 (учитель и ученик одновременно приходят в т. R), из этого будет следовать, что либо все точки области определения (т.е $h \geq 0, h \leq P'Q$), за исключением 0, $f(h)<0$, т.е учитель способен добраться в соответствующие точки окружности раньше ученика, либо $f(h)>0$, т.е ученик способен добраться в соответствующие точки окружности раньше учителя. Далее мы покажем, что это первый случай

Итак. Время учителя: $\pi+\gamma_0=\pi+\arccos(a_0+h)$. Время ученика: $\frac{\sqrt{h^2+SN^2}}{a_0} = \frac{\sqrt{h^2+(ON^2-OS^2)}}{a_0} = \frac{\sqrt{h^2+1-(a_0+h)^2}}{a_0}$. Разность производных -

$$-\frac{1}{\sqrt{1-(a_0+h)^2}} - \frac{-2(a_0+h)+2h}{2a_0\sqrt{1-(a_0+h)^2+h^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-(a_0+h)^2}} - \frac{-1}{\sqrt{1-(a_0+h)^2+h^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-(a_0+h)^2} - \sqrt{1-(a_0+h)^2+h^2}}{\sqrt{1-(a_0+h)^2+h^2} * \sqrt{1-(a_0+h)^2}}$$

Ввиду того, что $a_0+h<1$, знаменатель положительный. Найдём h, при которых числитель равен 0. (Нетрудно проверить, что при h=0 числитель нулевой)

Сравним

$\sqrt{1-(a_0+h)^2}$ и $\sqrt{1-(a_0+h)^2+h^2}$

$1-(a_0+h)^2$ и $1-(a_0+h)^2+h^2$

0 и h^2

Таким образом, в т. R (при h=0) значение f и f' равны 0, а $f'(h)<0$ на рассматриваемом промежутке, т.е. при увеличении h от значения 0 разность времени, затраченного учителем и учеником, будет уменьшаться, т.е. учитель будет приходить в рассматриваемые точки дуги QR раньше (его время будет меньше).

Задача 2.

Пусть H - траектория ученика. Скорость ученика OP' bkb vtymit. Докажем, что, начав движение в O, он не сможет убежать от учителя при его грамотных действиях.

Доказательство.ёё

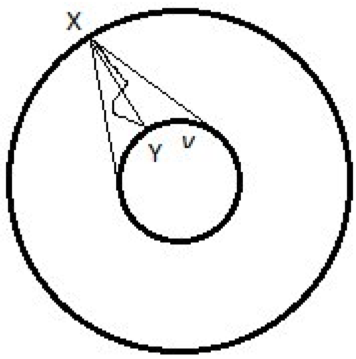
Предположим противное.

Рассмотрим окружность с радиусом a_0 и центром O (назовём её o).

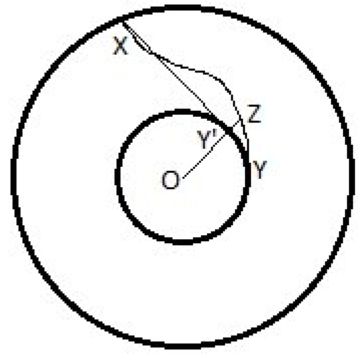
Найдём последнюю точку пересечения *H* и *o* (пусть *Y*), а также точку выхода из пруда (пусть *X*)

Алгоритм учителя должен быть следующим. Он движется с максимальной скоростью в одном направлении начиная с момента выхода ученика из *o* в направлении где $\angle POT$ <=180° до тех пор, пока *P* не оказывается на отрезке *OT* (назовёт этот момент 'учитель догнал ученика'). Далее он поддерживает это состояние (где *P*, *O* и *T* на одной прямой),а значит после достижения такого состояния ученик не может убежать, по крайней мере, не уплыв обратно в *o*. Вне *o* угловая скорость учителя больше независимо от того куда движется ученик, а значит угловая скорость движения отрезка *OP* такова, что учитель успевает за ней, т. е. способен двигаться с большей угловой скоростью. Таким образом *T* остаётся на луче *OP*. По этой же причине до момента, когда ‘учитель догонит ученика’, расстояние по дуге будет сокращаться.

Покажем, что такое состояние (*T* на отрезке *OP* всегда достижимо).



Пусть последняя точка выхода ученика из *OP* – *Y*, а конец его траектории *X*. Пусть меньшая дуга между концами касательных из X к *o* - *v*. Представим, что путь - ниточка, а *o* - жёсткая конструкция, и затем мы вытягиваем ниточку через *X* наружу. Здесь возможны 2 случая. Либо ниточка становиться отрезком *XY*, либо нет. Во втором случае отрезок (а в силу натяжения нити он будет наличествовать) нитки тянется от *X* к концу дуги *v* (и далее по дуге *o*). Назовём эту точку *Y'*. Ниточку после её вытягивания назовём вспомогательной траекторией *H'*. (Далее мы покажем, что движение по такой траектории более оптимально)



Рассмотрим второй случай. Пусть Z наиболее поздняя точка кривой *H* из точек луча *OY'*. Тогда, часть *YZ* траектории *H* > дуги *YY'*, а *ZX* часть траектории *H*> отрезка *ZX*>*Y'X* (как катет треугольника *XZY'*). Таким образом *H'* короче *H*

Очевидно, что в первом случае это также верно, т.е. *H'* короче *H* (или равна, если *H* и *H'* не совпадают).

Покажем идентичность утверждений: учитель в какой-то момент ‘догнал ученика’, и ученик не смог убежать от учителя. Второе следует из первого, поскольку учитель, как говорилось выше, способен поддерживать состояние ‘догнал ученика’ после его наступления, а значит, если траектория ученика кончается на ω, учитель также находится в точке выхода. Отрицание второго следует из отрицания первого, поскольку если в точке выхода ученика нет учителя, значит в этой точке, а, следовательно, ранее или в этот момент он его не догоняет.

Рассмотрим движение по траектории *H'*. Пока *P* движется по окружности до точки *Y'* (во 2-м случае начав движение в *Y*, в 1-м этот этап отбрасывается и точки *Y* и *Y'* совпадают), угол *TOP* сохраняется (из соотношения скоростей), или если скорость ученика a_0 уменьшается, а, после движения по отрезку *Y'X* (этот этап будет наличествовать в обоих случаях), если $TOY'(t_1)$=180°(момент когда *P*=*Y'*), а v_2 = a_0, *P* и *T* одновременно придут в *X* (как в задаче 1), а, если меньше, или а v_2 < a_0, то *T* придёт в *X* раньше. Тем более в случае движения по *H*, а значит, как было показано выше, в какой-то момент, продолжая движение в том же направлении, ‘учитель догонит ученика’.

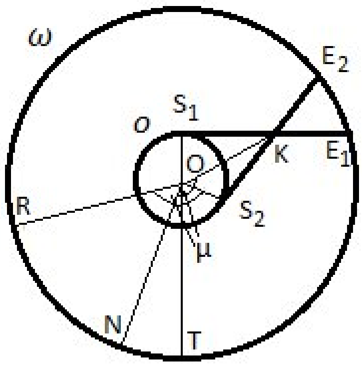
Задача 3.

Доказать, что при скорости ученика большей скорости, рассматриваемой в первых 2-х задачах (a_0<v_2), ученик убегает.
Доказательство.

Для начала покажем, что ученик может попасть в точку *S*, такую, что угол *TOS* = 180°. (На рисунке точка *S* совпадает с S_1 введённой далее). Действительно, попав в любую точку *o*, и плавая по *o*, т.к. его угловая скорость будет больше, он сможет менять угол *TOP(t)* по своему усмотрению. В том числе сделать его 180°.

Также заметим, что, если ученик и учитель будут двигаться согласно стратегии из задачи 1, у ученика будет запас времени относительно учителя при движении в нужную точку, и он сможет убежать, стартуя не с положения ∠*TOS* = 180°, а даже с меньшего угла (пусть μ) (Утверждение 1).

Пусть $S_1(t)$ и $S_2(t)$ – точки касания касательных из точки *P(t)* (на рисунке это *K*) к *o*



Итак, стратегия ученика в следующем: сначала он движется по любой касательной к *o* из *S* (на рисунке - вправо) так, чтобы его угловая скорость относительно центра пруда не превышала максимальную угловую скорость учителя (условие А). Потом, если в некоторой точке $P(t_1)$ его маршрута ∠$TOP(t_1)$ в одном из направлений станет < *μ* (на рисунке это ∠*NOK*, $N=T(t_1)$, $K=P(t_1)$, т.е. учитель заплыл за *N* и вернулся), ученик выбирает в качестве маршрута такую из 2-х касательных к *o* из *K* (пусть S_2K, как на рисунке) чтобы ∠NOS_2 было > ∠NOS_1.

Также заметим, что, если бы учитель стартовал из *R* (где ∠ROS_2=*μ)*, и двигался против часовой стрелки, а учитель из S_2, и двигался вправо по касательной (к точке E_2); в момент, когда ученик оказался бы в т. *K*, учитель бы проплыл не меньше дуги *RN*, поскольку из условия А следует, что его угловая скорость не меньше угловой скорости ученика. А, как следует из утверждения 1, ученик в этой ситуации убегает, а тем более, в ситуации, когда учитель отстаёт от своего оптимального положения или, по крайней мере не превосходит его, и находится в *N*, когда ученик в *K*.

В итоге мы получили, что из двигаясь к точке E_2, учитель не успевает, и он не успевает не зависимо от того, сколько раз ученик, ориентируясь на его действия, меняет траекторию. Ч.т.д.